Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: teoretyczna

Daniel Danielski

Prostokątne grupy Coxetera o brzegu homeomorficznym z krzywą Mengera

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2019

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

Badanie brzegów grup stanowi pewien obszar badań matematyki. W pracy [12] autorzy wskazują dwa naturalne pytania związane z tą tematyką. Jakie przestrzenie topologiczne można otrzymać jako brzegi grup? Dla ustalonej przestrzeni topologicznej, jakie grupy mają brzeg homeomorficzny z tą przestrzenią? W tej pracy rozważamy, kiedy brzeg prostokątnej grupy Coxetera jest homeomorficzny z krzywą Mengera, dla uproszczenia ograniczamy się do grup hiperbolicznych. Wyniki wyrażamy w terminach warunków na nerw takiej grupy. W ten sposób wpisujemy się w pewien podnurt wspomnianego nurtu badań. Na przykład w pracy [15] powiązano brzegi grup Coxetera o nerwach będących pewną klasą grafów z pewną inną klasą przestrzeni topologicznych, w pracy [14] sklasyfikowano hiperboliczne grupy Coxetera o planarnym nerwie dające w brzegu dywan Sierpińskiego, w pracy [5] sklasyfikowano hiperboliczne grupy Coxetera o nerwach będących grafami, które mają brzeg homeomorficzny z krzywą Mengera, w pracy [11] rozważa się przypadek grup niehiperbolicznych o mengerowskim brzegu.

W tej pracy najpierw dowodzimy następującego twierdzenia opisującego pewien warunek dostateczny na nerw prostokątnej grupy Coxetera, przy którym jej brzeg jest homeomorficzny z krzywą Mengera, a następnie stosujemy je do różnych rodzin nerwów.

Twierdzenie 1.1. *Niech N będzie nerwem prostokątnej grupy Coxetera W_N, która jest hiperboliczna. Jeżeli N jest nieseparowalny, nie jest pojedynczym sympleksem, jest* SG-*nieplanarny oraz dla każdego $n > 1$ i dowolnego sympleksu $\Delta \subseteq N$ zachodzi $H^n(N) = 0$ oraz $H^n(N \setminus \Delta) = 0$, to brzeg $\partial_\infty W_N$ jest homeomorficzny z krzywą Mengera.*

Uwaga 1.2. (i) Kompleks symplicjalny N jest nerwem pewnej prostokątnej grupy Coxetera wtedy i tylko wtedy, gdy jest flagowym kompleksem symplicjalnym.

(ii) Grupa W_N jest hiperboliczna wtedy i tylko wtedy, gdy jej nerw N spełnia warunek *braku pustych kwadratów* (tzn. nie zawiera pełnego podkompleksu będącego cyklem długości 4), [6, dół strony 233], czasem zwanego warunkiem *braku* $\square$.

(iii) Dla sympleksu Δ kompleksu N przestrzeń $N \setminus \Delta$ powstaje poprzez usunięcie z przestrzeni N całego (tj. domkniętego) sympleksu Δ, w szczególności nie tylko jego wnętrza.

(iv) Nerw N jest (z definicji) *nieseparowalny*, gdy jest spójny, nie ma rozspajającej pary niesąsiednich wierzchołków, nie ma rozspajającego sympleksu i nie ma rozspajającego pełnego podkompleksu będącego zawieszeniem sympleksu, por. [14].

(v) Dokładną definicję pojęcia SG-nieplanarności podamy w Rozdziale 3 (Definicja 3.6). Tu zaznaczymy jedynie, że nerw N jest SG-nieplanarny między innymi wtedy, gdy zawiera jako pełny podkompleks graf, który powstaje z grafu $K_{3,3}$ lub K_5 poprzez podrozbicie każdej jego krawędzi na co najmniej dwie części.

Ogólniej, jednym z celów tej pracy było dokonanie analizy podobnej do tez z pracy [14], korzystającej z charakteryzacji Whyburna dywanu Sierpińskiego, i skorzystanie z charakteryzacji Andersona krzywej Mengera, która polega na zamianie w tej pierwszej planarności na nigdzienieplanarność. W tym celu badaliśmy, jakie wyniki można osiągnąć za pomocą wykorzystywania nieplanarnych grafów pojawiających się w nerwie N do wkładania nieplanarnych grafów w brzeg $\partial_\infty W_N$ (i w konsekwencji, korzystając z założenia hiperboliczności W_N, w otwarte podzbiory brzegu). Dokładniej, z wykorzystaniem elementów budulcowych przedstawionych w Podrozdziale 3.1, dochodzimy do Twierdzenia 3.4, które jest głównym wkładem tej pracy w dowód Twierdzenia 1.1.

Następnie stosujemy Twierdzenie 1.1 do różnych rodzin nerwów. Naturalnym kandydatem na taką rodzinę były grafy, jednak te okazały się zostać ostatnio scharakteryzowane (przynajmniej w przypadku grup hiperbolicznych), [5]. (Jako ciekawostkę można podać fakt, że graf Petersena, będący grafem o wielu egzotycznych własnościach, (jako nerw) spełnia założenia Twierdzenia 1.1). Kolejnym naturalnym kandydatem były triangulacje powierzchni z brzegiem. W pracy rozważamy pewną ogólniejszą podklasę squwymiarowych kompleksów symplicjalnych, w której charakteryzujemy, które z nich dopuszczają triangulację, która jako nerw zadaje prostokątną grupę Coxetera o brzegu będącym krzywą Mengera (Twierdzenie 5.3, Wniosek 5.5). Staramy się zasugerować generyczność takich triangulacji. Drugim przykładem jest próba zastosowania Twierdzenia 1.1 do próby dowodu szczególnego przypadku pewnej ogólnej hipotezy dotyczącej brzegów (Hipoteza 5.8). Przykład ten pełni dwojaką funkcję – stanowi okazję do sprawdzenia siły głównego wyniku tej pracy, a także wprowadza pewną sugestię dotyczącą realizacji pojęcia generyczności. Ostatnim przykładem, powstałym nieco na bocznym torze względem reszty pracy, są triangulacje dysków D^n. Pokazujemy, że dla $n \geqslant 3$ dysk D^n dopuszcza triangulację, która jest nerwem prostokątnej grupy Coxetera o brzegu homeomorficznym z krzywą Mengera (Twierdzenie 5.12). Pewną motywacją do rozważania tego przykładu była istotna różnica pomiędzy wymiarem nerwu N a wymiarem brzegu $\partial_\infty W_N$, która okazuje się wymuszać na poszukiwanej triangulacji, by ta miała sporo sympleksów zawartych w brzegu ∂D^n.

Organizacja pracy. W Rozdziale 2 wprowadzamy i wyjaśniamy podstawowe pojęcia i notacje obecne w pracy, w szczególności rozjaśniamy większość pojęć ze Wstępu, a także opisujemy pewien element budulcowy stosowany w dowodzie Twierdzenia 3.4. W Rozdziale 3 zajmujemy się zanurzaniem nieplanarnych grafów w brzegach prostokątnych grup Coxetera, podsumowując te rozważania Twierdzeniem 3.4. W Rozdziale 4 dowodzimy Twierdzenia 1.1 i omawiamy konieczność niektórych spośród jego założeń. W Rozdziale 5 pokazujemy zastosowanie Twierdzenia 1.1 do trzech wspomnianych przykładów.

Rozdział 2

Preliminaria

Na wstępie zakładamy u czytelnika, oprócz podstawowej wiedzy z ogólnej matematyki, pewną znajomość zagadnień topologii algebraicznej i geometrii, w szczególności geometrycznej teorii grup. Naszym zamierzeniem jest nie przypominać pojęć z tych dziedzin, starając się rozwiewać na bieżąco ewentualne niejasności, a jako odnośnik polecamy książki [10, 9].

W tym rozdziale wprowadzamy podstawowe pojęcia i notacje, które będą używane we właściwej części pracy. Wskażemy również ich podstawowe własności, przy okazji prezentując obecny w tej pracy sposób widzenia pewnego wycinka matematycznej rzeczywistości.

2.1. Prostokątne grupy Coxetera i ich brzegi

Najpierw przedstawimy definicję prostokątnej grupy Coxetera i jej nerwu.

Definicja 2.1. Niech $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$ będzie grafem. *Prostokątna grupa Coxetera* W_Γ to grupa zadana przez prezentację $W_\Gamma := \langle \{v : v \in V_\Gamma\} | \{v^2 = 1 : v \in V_\Gamma\} \cup \{(uv)^2 = 1 : (u,v) \in E_\Gamma\}\rangle$. *Nerw* N_Γ grupy W_Γ to kompleks symplicjalny powstały przez rozpięcie na każdym pełnym podgrafie grafu Γ sympleksu.

Uwaga 2.2. (i) Warunek $(uv)^2 = 1$ w definicji prostokątnej grupy Coxetera można równoważnie zastąpić przez komutowanie u z v, $uv = vu$.

(ii) Graf Γ jest 1-szkieletem nerwu N_Γ.

(iii) Z definicji wynika wzajemna odpowiedniość pomiędzy *flagowymi kompleksami symplicjalnymi* (tj. takimi, że każdy pełny podgraf 1-szkieletu rozpina sympleks) a prostokątnymi grupami Coxetera. Ta odpowiedniość okazuje się być głębsza, niż obecnie sugeruje zaprezentowany kombinatoryczny warunek.

Teraz przejdziemy do tematyki kompleksów Davisa. Najpierw przypomnimy klasyczną konstrukcję grafu Cayleya.

Definicja 2.3. Niech G będzie grupą generowaną przez zbiór S. *Graf Cayleya* $\mathrm{Cay}(G,S)$ to nieskierowany graf, którego wierzchołkami są elementy grupy G, a zbiorem krawędzi jest $\{\{g, gs\} : g \in G, s \in S\}$. Z krawędzią $\{g, gs\}$ będziemy stowarzyszali etykietę s.

Uwaga 2.4. W dalszej części pracy będziemy rozważać wyłącznie grupy G i ich zbiory generatorów S takie, że każdy generator jest rzędu 2. W takiej sytuacji widzimy, że z każdą krawędzią grafu $\mathrm{Cay}(G,S)$ stowarzyszona jest dokładnie jedna etykieta oraz dla każdego wierzchołka g grafu $\mathrm{Cay}(G, S)$ oraz etykiety $s \in S$ istnieje jedyna krawędź grafu $\mathrm{Cay}(G, S)$ o etykiecie s i jednym z końców w wierzchołku g.

Zanim przejdziemy do właściwej definicji, będziemy potrzebować krótkiej dyskusji o podgrupach specjalnych prostokątnej grupy Coxetera.

Definicja 2.5. Niech W_N będzie prostokątną grupą Coxetera o nerwie N i niech T będzie podzbiorem wierzchołków kompleksu N. *Podgrupa specjalna* grupy W_N odpowiadająca zbiorowi wierzchołków T to podgrupa grupy W_N generowana przez podzbiór standardowych generatorów grupy W_N (tj. występujących w Definicji 2.1) odpowiadających zbiorowi wierzchołków T.

Uwaga 2.6.
(i) Okazuje się, że podgrupa specjalna G_T odpowiadająca zbiorowi T jest równa grupie W_K, gdzie K jest *pełnym podkompleksem* N (tzn. sympleksy kompleksu N rozpięte na wierzchołkach kompleksu K są sympleksami w K) o zbiorze wierzchołków T, [6, Theorem 4.1.6(i)] (*a priori* G_T jest ilorazem W_K, ale te dodatkowe relatory pochodzące z Definicji 2.1 okazują się nie mieć znaczenia).
(ii) W szczególności, dla ustalonego nerwu N, mamy wzajemną odpowiedniość pomiędzy pełnymi podkompleksami N a podgrupami specjalnymi grupy W_N.
(iii) Na poziomie grafów Cayleya, jeżeli K jest pełnym podkompleksem nerwu N, to graf $\mathrm{Cay}(W_K, K^{(0)})$ jest podgrafem $\mathrm{Cay}(W_N, N^{(0)})$.
(iv) Ponieważ w przypadku, gdy $\Delta \subseteq N$ jest (pojedynczym) sympleksem, graf $\mathrm{Cay}(W_\Delta, \Delta^{(0)})$ jest 1-szkieletem $(\dim \Delta + 1)$-kostki (W_Δ jest kanonicznie izomorficzna z $\mathbb{Z}_2^{\dim \Delta + 1}$), każdej (lewej) warstwie podgrupy W_Δ grupy W_N odpowiada 1-szkielet $(\dim \Delta + 1)$-kostki w grafie $\mathrm{Cay}(W_N, N^{(0)})$.

Po takich przygotowaniach możemy przejść do definicji kompleksu Davisa, która dzięki powyższym uwagom ma sens.

Definicja 2.7. Niech N będzie nerwem prostokątnej grupy Coxetera W_N. *Kompleks Davisa* Σ_N to kompleks kostkowy o 1-szkielecie $\mathrm{Cay}(W_N, N^{(0)})$, w który dla każdego sympleksu $\Delta \subseteq N$ wklejamy w podgrafy grafu $\mathrm{Cay}(W_N, N^{(0)})$ odpowiadające lewym warstwom podgrupy specjalnej W_Δ po jednej kostce wymiaru $\dim \Delta + 1$.

Uwaga 2.8. Niech W_N będzie prostokątną grupą Coxetera o nerwie N.
(i) Naturalne działanie grupy W_N na swoim grafie Cayleya $\mathrm{Cay}(W_N, N^{(0)})$ przedłuża się na cały kompleks Davisa Σ_N.
(ii) 2-szkielet kompleksu Davisa $\Sigma_N^{(2)}$ jest bardzo podobny do nakrycia uniwersalnego $\widetilde{P_N}$ kompleksu prezentacyjnego grupy W_N. Dokładniej, w szczególności, 1-szkielet nakrycia $\widetilde{P_N}$ powstaje z 1-szkieletu kompleksu Σ_N poprzez zdublowanie wszystkich jego krawędzi. Uwaga ta może być przydatna do rysowania kompleksu Davisa dla konkretnych przykładów nerwów.
(iii) Link każdego wierzchołka kompleksu Σ_N jest kanonicznie izomorficzny z nerwem N, dodatkowo etykiety wierzchołków N pokrywają się z etykietami wychodzących krawędzi w kompleksie Σ_N.
(iv) Jeżeli K jest pełnym podkompleksem N, to $\Sigma_K \subseteq \Sigma_N$.
(v) Σ_N ma naturalną metrykę (tzw. metryka Moussonga), która okazuje się być $\mathtt{CAT(0)}$, [6, Theorem 12.3.3]. Metryka ta powstaje poprzez zadanie wewnątrz kostek metryki euklidesowej i standardowe przedłużenie jej na cały kompleks poprzez branie infimum długości łamanych o segmentach zawartych w pojedynczych kostkach.

(vi) W szczególności każde dwa punkty kompleksu Σ_N są połączone jedyną geodezyjną (izometrycznym obrazem euklidesowego odcinka), [9, Corollary 3.72].

Teraz zdefiniujemy brzeg prostokątnej grupy Coxetera.

Definicja 2.9. (i) Niech X będzie przestrzenią spełniającą warunek $\mathtt{CAT(0)}$. *Brzeg* $\mathtt{CAT(0)}$ $\partial_{\mathtt{CAT(0)}}X$ przestrzeni X to przestrzeń o punktach będących promieniami geodezyjnymi startującymi z dowolnego ustalonego punktu bazowego x_0 z topologią pochodzącą od systemu odwrotnego $(\{S_R : R > 0\}, \{\pi_r^R : R > r > 0\})$, gdzie S_R to punkty w odległości R od x_0, a π_r^R to kanoniczne rzutowanie S_R na S_r (przyporządkowujące dowolnemu punktowi x większej sfery jedyny punkt x' mniejszej sfery leżący na geodezyjnej od punktu x_0 do punktu x).

(ii) Niech W_N będzie prostokątną grupą Coxetera. *Brzeg* $\partial_\infty W_N$ grupy W_N określamy jako $\partial_\infty W_N := \partial_{\mathtt{CAT(0)}}\Sigma_N$.

Uwaga 2.10. (i) Brzeg $\mathtt{CAT(0)}$ (z dokładnością do naturalnego homeomorfizmu) nie zależy od wyboru punktu, z którego wychodzą promienie geodezyjne, [6, Section I.8]. W dalszej części pracy będziemy rozważać kompleksy Davisa z punktem bazowym w wierzchołku odpowiadającym elementowi neutralnemu, a punkt brzegu odpowiadający promieniowi geodezyjnemu ϱ będziemy oznaczać $[\varrho]$.

(ii) Brzeg dowolnej prostokątnej grupy Coxetera jest przestrzenią metryzowalną (jako granica odwrotna przestrzeni metrycznych), i zwartą, [6, Section I.8].

(iii) Z podstawowych własności brzegu Gromowa wynika, że w przypadku, gdy grupa W_N jest hiperboliczna, jej brzeg $\partial_\infty W_N$ jest homeomorficzny z jej brzegiem Gromowa, a więc w szczególności nie zależy od wyboru zbioru generatorów (grupy W_N), [3, Proposition III.H.3.7 i Theorem III.H.3.9].

W dalszej części pracy przydatny będzie fakt łączący podgrupy specjalne z podprzestrzeniami brzegu.

Fakt 2.11. *Niech K będzie pełnym podkompleksem nerwu N grupy W_N. Wtedy*

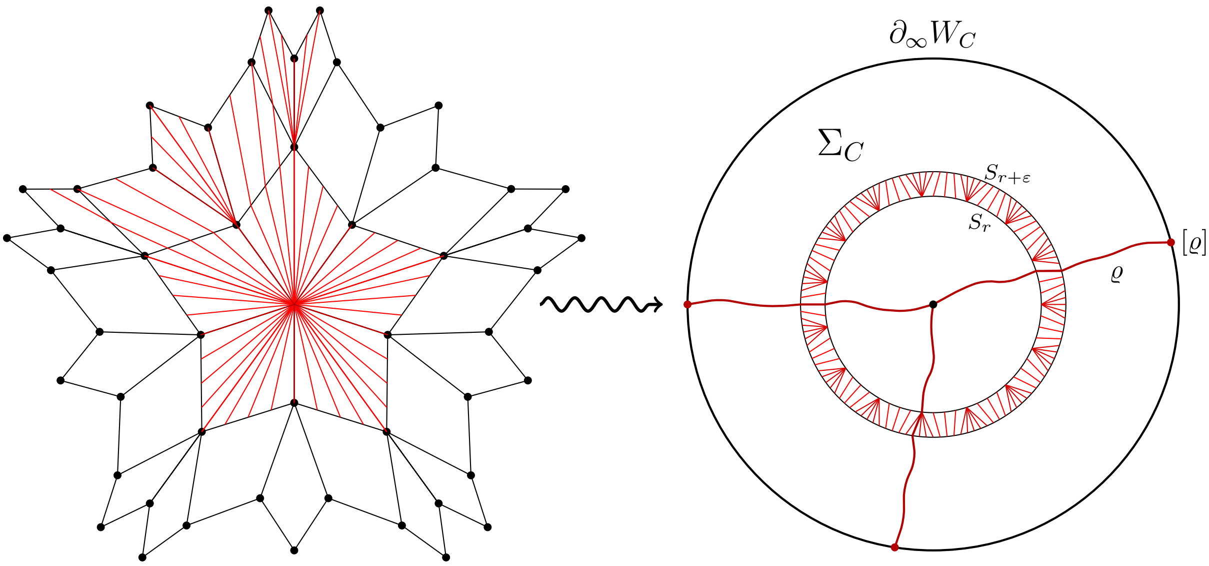
(i) Kompleks Σ_K jest wypukłym podkompleksem Σ_N, [14, Proposition A.2].

(ii) W szczególności brzeg $\partial_\infty W_K$ jest podprzestrzenią brzegu $\partial_\infty W_N$, [14, Proposition A.1].

2.2. Grupy o nerwie będącym cyklem

Celem tego podrozdziału jest zarówno zilustrowanie definicji występujących w poprzednim podrozdziale, jak i opis pewnego obiektu, który będzie odgrywał istotną rolę w dalszych rozważaniach, dokładniej, przekonanie czytelnika, że pewien kanoniczny rysunek (zob. Rysunek 2.1) istotnie obrazuje własności kompleksu Davisa i jego brzegu w przypadku grupy o nerwie będącym cyklem, co podsumowujemy Faktem 2.13.

Niech C będzie cyklem o długości $n \geqslant 4$ o kolejnych wierzchołkach $x_1, \ldots, x_n$. Wówczas C jest flagowym kompleksem symplicjalnym, a więc odpowiada mu pewna prostokątna grupa Coxetera W_C. Rysując w naturalny sposób jej kompleks Davisa Σ_C, otrzymujemy parkietaż 2-kostkami wnętrza $\mathrm{int}D^2$ 2-wymiarowego dysku D^2 (równoważnie płaszczyzny) taki, że w każdym wierzchołku spotyka się n 2-kostek (zob. Uwaga 2.8).



Rysunek 2.1: *Po lewej:* fragment kompleksu Σ_C dla $n = 5$ z zaznaczonymi pewnymi geodezyjnymi. *Po prawej:* pewien sposób rysowania $\Sigma_C \cup \partial_\infty W_C$ obrazujący tezę Faktu 2.13.

Przeanalizujemy teraz promienie geodezyjne wychodzące z wierzchołka $e \in \Sigma_C$. Po pierwsze, zauważmy, że z Faktu 2.11 wynika, że na każdej 2-kostce kompleksu Σ_C indukowana z Σ_C metryka jest standardową metryką euklidesową, w szczególności wszystkie geodezyjne w Σ_C są łamanymi, których fragmenty wewnątrz poszczególnych kostek kompleksu Σ_C są euklidesowymi segmentami. Dalej, widzimy stąd, że geodezyjne wychodzą promieniście z wierzchołka e i kontynuują się do brzegu 2-kostek, do których należy wierzchołek e. Spodziewamy się, że te geodezyjne będą się „promieniście kontynuować", zapełniając cały otwarty dysk, na którym narysowaliśmy kompleks Σ_C, uciekając do jego brzegu, dając łącznie, że brzeg $\partial_\infty W_C$ jest homeomorficzny z $\partial D^2 \cong S^1$. Z pomocą przychodzi nam następujący fakt o kontynuowaniu geodezyjnych, który wynika z [7, Lemma 2d.1].

Fakt 2.12. *Niech γ będzie geodezyjną (izometrycznym obrazem domkniętego odcinka euklidesowego) w kompleksie Σ_C, której ostatni segment dochodzi do brzegu 2-kostki, w której się zawiera (dokładniej, nie może już być przedłużony wewnątrz tej 2-kostki). Wówczas:*

- *(i) Jeżeli γ dochodzi do wierzchołka, to γ może być kontynuowana segmentem s zawartym w pewnej 2-kostce wtedy i tylko wtedy, gdy kąt pomiędzy ostatnim segmentem geodezyjnej γ a segmentem s, mierzony w obu możliwych kierunkach, wynosi co najmniej π. (W szczególności, gdy $n \geqslant 5$, w wierzchołkach następuje bifurkacja.)*
- *(ii) Jeżeli γ dochodzi do wnętrza krawędzi, to γ może być kontynuowana wyłącznie (jedynym z dokładnością do kierunku) segmentem s zawartym w pewnej 2-kostce, dla którego kąt pomiędzy s a ostatnim segmentem γ wynosi π.*

Dodatkowo segment s można wybrać tak, by był maksymalny wewnątrz 2-kostki, do której należy, tzn. by geodezyjna γs dochodziła do brzegu tej 2-kostki.

Bogatsi o tę wiedzę możemy przystąpić do dokładniejszego opisu systemu odwrotnego (S_R, π_r^R) występującego w definicji brzegu $\partial_\infty W_C$. Po pierwsze, widzimy że każda geodezyjna przedłuża się do promienia geodezyjnego, a promienie geodezyjne (o początku w wierzchołku e) pokrywają cały kompleks Σ_C. Po drugie, ponownie patrząc na lokalne zachowanie geodezyjnych, widzimy że zbiór $\{S_R : R > 0\}$ to koncentrycznie ułożone homeomorficzne kopie okręgów S^1, a odwzorowania π_r^R są odwzorowaniami monotonicznymi (tj. przeciwobrazy punktów są spójne). Czyli możemy patrzeć na nasz rysunek, jak na system odwrotny umieszczony we wnętrzu dwuwymiarowego dysku. Teraz możemy skonkludować, że przy dobrym rysunku (w szczególności naturalny rysunek powinien spełniać tę własność), każdy promień geodezyjny ma jedyny punkt skupienia na brzegu dysku i, dalej, zachodzi następujący fakt, którego dowód (jedynie) szkicujemy, ponieważ sam fakt jest oczekiwany, a jego dowód jest doprecyzowaniem powyższych rozważań i nie stanowi istoty omawianych zagadnień.

Fakt 2.13. *Istnieją homeomorfizmy $h_1 : \Sigma_C \to \mathrm{int} D^2$ i $h_2 : \partial_\infty W_C \to \partial D^2$ takie, że dla każdego promienia geodezyjnego ϱ w Σ_C rozpoczynającego się w wierzchołku e zachodzi $\overline{h_1(\varrho)} \cap \partial D^2 = \{h_2([\varrho])\}$.*

Dowód. (szkic) Konstrukcję można traktować jako odpowiednik parametryzacji zadawanej przez odwzorowanie (geodezyjnego) eksponensu na rozmaitości (co motywuje, by patrzeć na dysk D^2 używając współrzędnych biegunowych wokół jego środka O). Fundamentalną różnicą jest występowanie w kompleksie Σ_C punktów, w których zachodzi nietrywialne zachowanie promieni geodezyjnych (dokładniej, dla $n \geqslant 5$, w wierzchołkach Σ_C następuje bifurkacja). Oznaczmy $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots \to \infty$ odległości, w których znajdują się wierzchołki kompleksu Σ_C od wierzchołka e, ustalmy dowolny ciąg $0 = R_0 < R_1 < R_2 < \ldots \to 1$ oraz dowolny ciąg $(b_k) \subseteq (0,1)$ taki, że $b := \prod b_k > 0$. Definiujemy h_1 tak, by dla dowolnego $k = 0, 1, 2, \ldots$ i promieni geodezyjnych ϱ, ϱ' zachodziło $h_1(S_{r_k}) = \{x \in D^2 : d_{D^2}(O, x) = R_k\}$, obraz $h_1(\varrho|[r_k, r_{k+1}])$ był odcinkiem oraz, dla $k > 0$, różnica kąta (we współrzędnych biegunowych na D^2) pomiędzy punktami $h_1(\varrho(r_k))$ i $h_1(\varrho(r_{k+1}))$ wynosiła co najwyżej 2^{-k} i kątowa długość łuku (o środku w O i promieniu R_{k+1}) łączącego $h_1(\varrho(r_{k+1}))$ z $h_1(\varrho'(r_{k+1}))$ wynosiła co najmniej b_k razy kątowa długość łuku (o środku w O i promieniu R_k) łączącego $h_1(\varrho(r_k))$ z $h_1(\varrho'(r_k))$ (zob. Rysunek 2.1, spełnienie dwóch ostatnich warunków sprowadza się do tego, by rozwidlenie przy bifurkacji było dostatecznie małe). Tak określone odwzorowanie h_1 jest homeomorfizmem. Zachodzą następujące kluczowe obserwacje: dla dowolnego $k \geqslant 1$ i promienia geodezyjnego ϱ mamy, że ($\clubsuit$) dla dowolnego $r \in [k, \infty)$ współrzędne kątowe punktów $\varrho(k)$ i $\varrho(r)$ różnią się o co najwyżej 2^{-k+1} oraz ($\diamondsuit$) dla dowolnego promienia geodezyjnego ϱ' i $\mathbb{N} \ni k' > k$ kątowa długość łuku łączącego $h_1(\varrho(k'))$ z $h_1(\varrho'(k'))$ wynosi co najmniej b razy kątowa długość łuku łączącego $h_1(\varrho(k))$ z $h_1(\varrho'(k))$. Definiujemy odwzorowanie $h_2 : \partial_\infty W_C \to \partial D^2$ równaniem $\{h_2([\varrho])\} = \overline{h_1(\varrho)} \cap \partial D^2$, na mocy ($\clubsuit$) jest ono dobrze określone. Korzystając z ($\diamondsuit$) można pokazać, że jest ono różnowartościowe, a z ($\clubsuit$), że jego obraz jest gęsty w ∂D^2 i jest ono ciągłe. Zatem ze zwartości brzegu $\partial_\infty W_C$ obraz h_2 to cały brzeg ∂D^2 i h_2 jest homeomorfizmem. $\square$

To uzasadnia używaną przez nas konwencję rysunkową, którą będziemy stosować przez resztę pracy. Dodatkowo, dyskutując później o własnościach poruszanych tu obiektów, nie będziemy już jawnie odwoływać się do tego podrozdziału.

2.3. Krzywa Mengera

Nie będziemy tu przytaczać standardowej definicji krzywej Mengera, w której powstaje ona poprzez usuwanie odpowiednich fragmentów sześcianu, ponieważ w pracy nie będziemy z niej korzystać. Zamiast tego będziemy myśleć o niej w terminach następującej charakteryzacji, [1, 2].

Fakt 2.14. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną, która jest metryzowalna, zwarta, jednowymiarowa, spójna, lokalnie spójna, bez punktów lokalnego rozspajania, nigdzienieplanarna. Wówczas X jest homeomorficzna z krzywą Mengera.*

Pojęcie *nigdzienieplanarności* występujące w powyższej charakteryzacji oznacza, że żaden zbiór otwarty nie jest planarny.

Rozdział 3

Nieplanarność

Celem tego rozdziału jest znalezienie warunku dostatecznego na nigdzienieplanarność brzegu prostokątnej grupy Coxetera. Dokładniej, nauczymy się zanurzać w brzegu grupy pewne grafy związane z jej nerwem, by znaleźć warunek na zanurzenie grafu nieplanarnego, co implikuje, razem z obecnym w Twierdzeniu 1.1 założeniem hiperboliczności, nigdzienieplanarność brzegu (więcej szczegółów w Rozdziale 4).

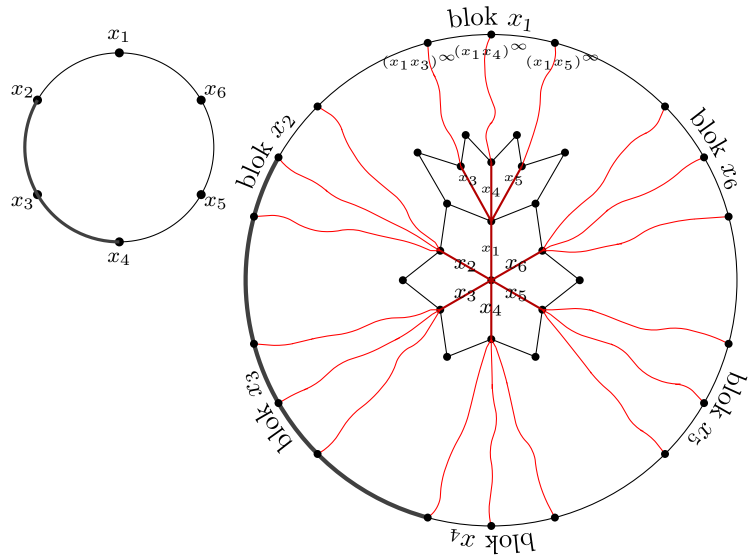
W tym rozdziale będziemy opisywać kolejne elementy konstrukcji włożenia grafu w brzeg, ostatecznie wykorzystując je w dowodzie Twierdzenia 3.4, które w przybliżeniu mówi, że jeżeli pewien graf jest zanurzony w dobry sposób w nerwie, to podobny do niego graf zanurza się w brzegu (i w szczególności, jeżeli pierwszy był nieplanarny, to drugi również).

3.1. Elementy budulcowe

Zauważmy, że z Faktu 2.11 wynika, że jeżeli w nerwie istnieje pełny podkompleks będący cyklem, to w brzegu istnieje odpowiadająca mu homeomorficzna kopia okręgu S^1. Kawałki takich okręgów staną się krawędziami zanurzenia grafu.

Teraz poszukamy w nerwie źródła wierzchołków. Zauważmy, że grupa o nerwie będącym dwoma wierzchołkami a, b niepołączonymi krawędzią to nieskończona grupa dihedralna, której kompleks Davisa to prosta rzeczywista podzielona na 1-kostki etykietowane na przemian elementami a i b. Toteż jej brzeg składa się z dwóch punktów odpowiadających promieniom geodezyjnym $ababab\ldots$ oraz $bababa\ldots$, oznaczmy te punkty w brzegu, odpowiednio, $(ab)^\infty$ i $(ba)^\infty$. W ten sposób, w świetle Faktu 2.11 każda para niesąsiednich wierzchołków w nerwie zadaje parę punktów w brzegu. Punkty tej postaci będą wierzchołkami zanurzenia grafu.

Spróbujemy lepiej zrozumieć, w jakiej kolejności leżą poszczególne potencjalne wierzchołki w kopiach S^1, z których będziemy wycinać krawędzie. W tym celu rozważmy nerw będący cyklem C o kolejnych wierzchołkach $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Patrząc na pierwszą krawędź promieni geodezyjnych postaci $x_i x_j x_i x_j \ldots$ (dla x_i, x_j niesąsiednich) w kompleksie Σ_C, widzimy (cyklicznie) najpierw wspólnie rozpoczynające się geodezyjne postaci $x_1 x_k x_1 x_k \ldots$ (dla k takich, że x_1, x_k są niesąsiednie), następnie $x_2 x_k x_2 x_k \ldots$ (x_2, x_k niesąsiednie), i tak dalej, aż do $x_n x_k x_n x_k \ldots$ (x_n, x_k niesąsiednie). Taki porządek zachowuje się również na brzegu C: najpierw (cyklicznie) mamy punkty postaci $(x_1 x_k)^\infty$ (x_1, x_k niesąsiednie), potem $(x_2 x_k)^\infty$ (x_2, x_k niesąsiednie), ..., $(x_n x_k)^\infty$ (x_n, x_k niesąsiednie). Dla ustalonego i zbiór $\{(x_i x_j)^\infty : x_i, x_j \text{ niesąsiednie w } C\} \subseteq \partial_\infty W_C$ będziemy nazywać *blokiem* x_i. Podob-



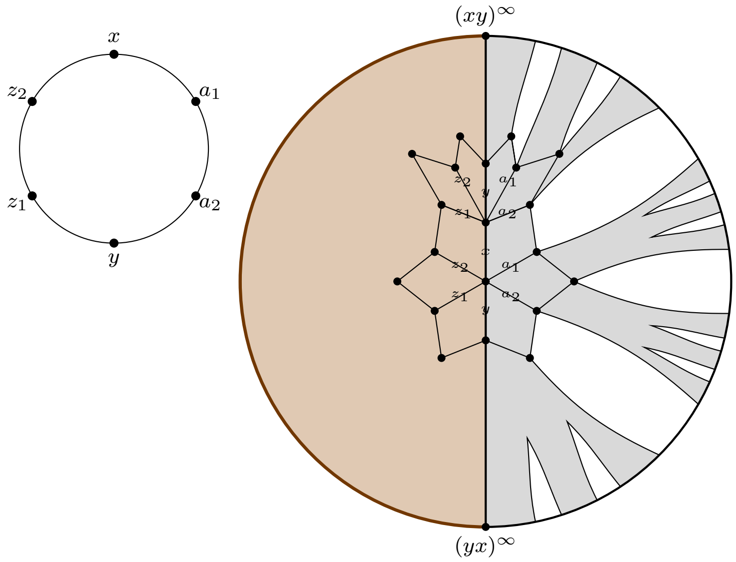
Rysunek 3.1: Nerw C będący cyklem długości 6, fragment odpowiadającego mu kompleksu Σ_C oraz jego brzeg $\partial_\infty W_C$; zaznaczono promienie geodezyjne pochodzące od dwuelementowych podgrup specjalnych grupy W_C oraz bloki występujące na brzegu. Pogrubiono łuki $\mathcal{E}(x_4, x_6, x_5, C)$ oraz $\mathcal{E}_\infty((x_4x_6)^\infty, (x_6x_3)^\infty, x_5, C)$.

nie można zbadać kolejność występowania na brzegu $\partial_\infty W_C$ punktów należących do poszczególnych bloków, czego jednak później *explicite* nie będziemy potrzebować, choć elementy tej analizy będą pojawiać się w dalszych rozważaniach. Dzięki temu możemy opisywać krawędzie w brzegu: dla wierzchołków $x, x', y, y', z \in C^{(0)}$, gdzie x, y, z są parami różne, oznaczmy przez $\mathcal{E}_\infty((xx')^\infty, (yy')^\infty, z, C)$ fragment łuku $\partial_\infty W_C$ pomiędzy punktami $(xx')^\infty$ i $(yy')^\infty$, który zawiera (dowolny, równoważnie każdy) punkt brzegu należący do bloku z. Można myśleć, że w pewien sposób odpowiada on łukowi $\mathcal{E}(x, y, z, C)$ łączącemu w C wierzchołek x z wierzchołkiem y, który zawiera wierzchołek z. Zob. Rysunek 3.1.

Teraz będziemy chcieli zrozumieć przecięcia par łuków powyższej postaci. Temu celowi służy następujący lemat pozwalający analizować przecięcia par cykli w nieskończoności w terminach przecięć generujących je cykli w nerwie.

Lemat 3.1. *Niech C_1, C_2 będą pełnymi podkompleksami nerwu N, takimi że C_1 jest cyklem, niech x, y będą różnymi, niesąsiednimi (w C_1) wierzchołkami C_1. Załóżmy, że istnieje wierzchołek $z \in C_1^{(0)}$ taki, że zachodzi $\mathcal{E}(x, y, z, C_1) \cap C_2 \subseteq \{x, y\}$. Wówczas $\mathcal{E}_\infty((xy)^\infty, (yx)^\infty, z, C_1) \cap \partial_\infty W_{C_2} \subseteq \{(xy)^\infty, (yx)^\infty\}$.*

Dowód. Przez cały dowód polecamy patrzeć na Rysunek 3.2. Kluczową dla dowodu obserwacją jest opis 2-kostek sąsiadujących w kompleksie Σ_{C_1} z dwustronną geodezyjną $\Sigma_{\{x,y\}}$. Otóż cały czas po jednej stronie tejże znajdują się kostki pochodzące od generatorów będących wierzchołkami łuku łączącego x z y zawierającego z, a po drugiej stronie te pochodzące od łuku łączącego x z y nie zawierającego z. Istotnie, niech kolejne wierzchołki cyklu C_1 to $x, a_1, \ldots, a_l, y, z_1, \ldots, z_k$ (gdzie $z \in \{z_1, \ldots, z_k\}$). Rozważmy wierzchołek zerowy $e \in \Sigma_{C_1}$. Wychodzą z niego kolejno cyklicznie krawędzie $x, a_1, \ldots, a_l, y, z_1, \ldots, z_k$. Teraz rozważmy wierzchołek $x \in \Sigma_{C_1}$. Wówczas jest on połączony z e krawędzią x, do której przyklejona jest 2-kostka o



Rysunek 3.2: Sytuacja w dowodzie Lematu 3.1 w przypadku, gdy nerw C_1 jest cyklem długości 6, a $(C_1 \cap C_2)^{(0)} = \{x, a_1, a_2, y\}$ (wówczas można pokazać, że $\Sigma_{C_1 \cap C_2}$ przypomina drzewo Cantora, a $\partial_\infty W_{C_1 \cap C_2}$ jest (homeomorficzny ze) zbiorem Cantora). Zaznaczono fragment kompleksu Σ_{C_1} oraz jego brzeg $\partial_\infty W_{C_1}$. Na brązowo zaznaczono fragment kompleksu Σ_{C_1}, przez który przechodzą wszystkie promienie geodezyjne dające łuk $\mathcal{E}_\infty((xy)^\infty, (yx)^\infty, z_1, C)$ i tenże łuk w $\partial_\infty W_{C_1}$, a na szaro kompleks $\Sigma_{C_1 \cap C_2}$ i $\partial_\infty W_{C_1 \cap C_2} \subseteq \partial_\infty W_{C_1}$.

krawędziach x, a_1, co znaczy, że krawędzie wokół x znajdują się w cyklicznie odwrotnej kolejności, niż te wokół e, co dowodzi (lokalnie) tezy. Podobnie dla pary wierzchołków x, xy, a całość wynika z niezmienniczości Σ_{C_1} na lewe działanie grupy W_{C_1}, w szczególności na elementy postaci $(xy)^k$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

Rozważmy promień geodezyjny ϱ dający w brzegu element $[\varrho]$ należący do przekroju $\mathcal{E}_\infty((xy)^\infty, (yx)^\infty, z, C_1) \cap \partial_\infty W_{C_2}$. W szczególności mamy $\varrho \subseteq \Sigma_{C_1} \cap \Sigma_{C_2} (= \Sigma_{C_1 \cap C_2})$. Załóżmy, że $[\varrho] \neq (xy)^\infty, (yx)^\infty$. Wtedy ϱ w pewnym momencie „odkleja się” od $\Sigma_{\{x,y\}}$. Jednak, na mocy kluczowej obserwacji, z jednej strony ϱ musiałby się „odkleić” w jedną stronę ($[\varrho] \in \mathcal{E}_\infty((xy)^\infty, (yx)^\infty, z, C_1)$), a z drugiej w przeciwną ($[\varrho] \in \partial_\infty W_{C_1 \cap C_2}$). Sprzeczność. □

3.2. Zasadnicza konstrukcja

Teraz niemalże jesteśmy gotowi udowodnić twierdzenie o zanurzaniu grafu w brzeg. Potrzebujemy najpierw wprowadzić dwie definicje dotyczące grafów.

Definicja 3.2. (i) Graf H jest *słabym minorem* grafu G, jeżeli powstaje z G poprzez ciąg operacji polegających na kontrakcji krawędzi.

(ii) Graf G jest *krawędziowym podrozbiciem* grafu H, jeżeli powstaje z H poprzez zastąpienie każdej krawędzi grafu H pewną ścieżką składającą się z co najmniej jednej krawędzi.

Uwaga 3.3. (i) Jeżeli pewien graf nieplanarny jest słabym minorem grafu G, to G jest również nieplanarny (łatwo widać to dla pojedynczej kontrakcji, potem indukcja).

(ii) Jeżeli graf H jest krawędziowym podrozbiciem grafu G, to kanonicznie można włożyć zbiór wierzchołków grafu G w zbiór wierzchołków grafu H. Co więcej, jeżeli G' jest podgrafem G, to w H indukuje się w naturalny sposób podgraf H' będący krawędziowym podrozbiciem G'.

Twierdzenie 3.4. *Rozważmy nerw N, którego 1-szkielet $N^{(1)}$ zawiera graf Γ, który jest krawędziowym podrozbiciem hamiltonowskiego grafu (tzn. grafu posiadającego cykl Hamiltona, czyli cykl przechodzący dokładnie raz przez każdy wierzchołek) prostego G nie zawierającego wierzchołków stopnia mniejszego niż 3. Niech Γ rozpada się na cykl C – podgraf pochodzący od (pewnego) cyklu Hamiltona D w G oraz zbiór ścieżek $S_1, \dots, S_k$ o końcach w C. Załóżmy, że C jest pełnym podkompleksem N (czyli w szczególności S_i nie są pojedynczymi krawędziami). Wówczas, jeżeli istnieje wybór łuków $L_1, \dots, L_k$ zawartych w C taki, że dla każdego i łuk L_i łączy końce S_i oraz $S_i \cup L_i$ jest pełnym podkompleksem N, to w $\partial_\infty W_N$ zanurza się pewien graf H, którego słabym minorem jest G.*

Uwaga 3.5. Zauważmy, że jeżeli graf Γ w sformułowaniu jest pełnym podkompleksem N i wybierzemy w nim cykl C, to warunek, że $S_i \cup L_i$ jest pełnym podkompleksem N, staje się trywialny, a więc wybór łuków L_i nie ma znaczenia. Jeżeli dodatkowo założymy, że każdej krawędzi G odpowiada ścieżka długości co najmniej 2 w Γ, to wówczas wybór cyklu C nie ma znaczenia.

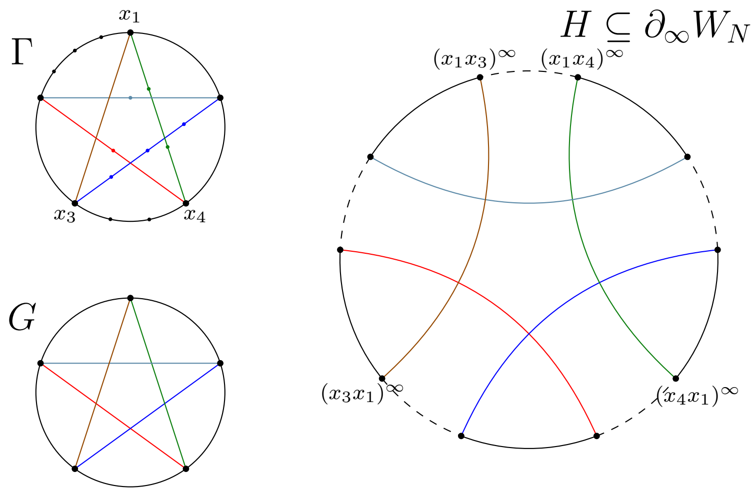
Definicja 3.6. Flagowy kompleks symplicjalny N, który spełnia założenie Twierdzenia 3.4 dla pewnego grafu nieplanarnego G, nazywamy SG-*nieplanarnym.*

Nazwa powyższego pojęcia, SG-nieplanarność, bierze się z faktu, że w kompleksie N zanurzony jest pewien *graf nieplanarny* G w sposób „*szeroki*” (ze względu na obecne w sformułowaniu Twierdzenia 3.4 wymagania, że niektóre cykle G są pełnymi podkompleksami N). Teraz możemy przejść do dowodu Twierdzenia 3.4.

Dowód. (Twierdzenia 3.4) Polecamy spoglądać na Rysunek 3.3. W dowodzie, by niepotrzebnie nie mnożyć bytów, będziemy utożsamiać graf H z jego zanurzeniem w brzegu $\partial_\infty W_N$, a także utożsamiać w naturalny sposób wierzchołki grafu G z pewnym podzbiorem wierzchołków grafu Γ.

Konstrukcja. Niech $x_1, \dots, x_n$ – kolejne wierzchołki cyklu D. Definiujemy zbiór wierzchołków grafu H, $V_H := \{(xx')^\infty : (\exists i)(x, x' \text{są końcami ścieżki } S_i)\}$. Te promienie są dobrze zdefiniowane, bo końce ścieżek są niesąsiednie, ponieważ C jest pełnym podkompleksem N i G jest prosty. Oczywiście $V_H \subseteq \partial_\infty W_C$. Krawędzie będą miały dwa źródła, podzielimy je na 3 rodzaje. Pierwszym ze źródeł jest $\partial_\infty W_C$ – bierzemy indukowany przez V_H podział $\partial_\infty W_C$. Powstają w ten sposób krawędzie dwóch rodzajów – krawędzie pomiędzy blokiem x_i a blokiem x_{i+1} dla pewnego i (typ Ia) oraz krawędzie pomiędzy wierzchołkami bloku x_i dla pewnego i (typ Ib). Drugim źródłem są podkompleksy $S_i \cup L_i$. Dla cięciwy S_i o końcach x, y, wybrawszy dowolny wierzchołek $z \in S_i$ nie będący końcem S_i, dodajemy do H krawędź $\mathcal{E}_\infty((xy)^\infty, (yx)^\infty, z, S_i \cup L_i)$ (typ II).

Poprawność. Graf H ma się okazać być słabym minorem grafu G w następujący sposób. Najpierw, dla każdego i, w cyklu D zastępujemy wierzchołek x_i grafu G



Rysunek 3.3: Podkompleks Γ pewnego nerwu N będący krawędziowym podrozbiciem grafu $G \cong \mathrm{K}_5$ razem z konstruowanym zanurzeniem grafu H. Liniami ciągłymi czarnymi oznaczono cykl C (w Γ), cykl D (w G) i krawędzie typu Ia (w H), liniami przerywanymi krawędzie typu Ib (w H), a liniami kolorowymi ścieżki S_i (w Γ), odpowiadające im krawędzie w G oraz krawędzie typu II (w H).

ścieżką B_i o $\deg_G x_i - 2$ wierzchołkach (oryginalne krawędzie cyklu D mają swoje odpowiedniki pod postacią krawędzi typu Ia, a ścieżki B_i są realizowane przez krawędzie typu Ib). Następnie, chcemy by każdej krawędzi (x_i, x_j) grafu G nie należącej do cyklu D odpowiadała krawędź pomiędzy pewną parą wierzchołków, z których jeden należy do B_i, a drugi do B_j, dodatkowo w taki sposób, by takie pary były rozłączne dla różnych krawędzi grafu G (za odpowiedniki takich krawędzi odpowiadają krawędzie typu II), inaczej, równoważnie, aby każdy wierzchołek grafu H był stopnia 3. Nietrudno sprawdzić, że graf G powstaje z grafu H poprzez kontrakcję wszystkich krawędzi typu Ib.

Aby zakończyć dowód wystarczy sprawdzić, że zdefiniowane krawędzie przecinają się w sposób wynikający z powyższego opisu. Rozważmy parę różnych krawędzi e_1, e_2. Jeżeli pochodzą one od cyklu C (tj. są typu Ia lub Ib), teza jest oczywista. Jeżeli dokładnie jedna z nich pochodzi od C, teza wynika wprost z Lematu 3.1 – inkluzja w założeniu jest równością, a więc inkluzja w tezie staje się równością. Pozostaje przypadek, gdy e_1, e_2 pochodzą od różnych ścieżek S_i, S_j. Oznaczmy ich końce przez a_1, b_1, a_2, b_2. Wówczas z Lematu 3.1 mamy, że $e_1 \cap e_2 \subseteq (e_1 \cap \partial_\infty W_{S_j \cup L_j}) \cap (\partial_\infty W_{S_i \cup L_i} \cap e_2) \subseteq \{(a_1b_1)^\infty, (b_1a_1)^\infty\} \cap \{(a_2b_2)^\infty, (b_2a_2)^\infty\} = \emptyset$. Ostatnia równość zachodzi, gdyż G jest prosty, zatem $\{a_1, b_1\} \neq \{a_2, b_2\}$. $\square$

Uwaga 3.7. Poniższa uwaga ma charakter swobodnego komentarza autora i nie jest niezbędna do zrozumienia pracy, jednak może zwiększyć zrozumienie problemów występujących w rozważanym zagadnieniu, ponieważ rozdział ten jest głównie, prowadzonym możliwie prosto do celu, opisem pewnego rozwiązania. O ile występowanie krawędziowego podrozbicia w założeniu Twierdzenia 3.4 wydaje się być naturalne, z wystąpieniem słabego minora wiąże się pewien problem z konstrukcją w brzegu wierzchołków stopnia większego niż 3, który postaramy się tu zarysować. Rozważmy, zachowując oznaczenia z Twierdzenia 3.4, wydające się być naturalnym, podejście, w którym każdemu wierzchołkowi x grafu G odpowiada punkt $(xx')^\infty$ w brzegu $\partial_\infty W_N$ (dla pewnego wierzchołka x' przypisanego wierzchołkowi x). Spróbujemy przeprowadzić konstrukcję analogiczną do tej z dowodu Twierdzenia 3.4 – załóżmy, że wybraliśmy już cykl C, ścieżki S_i i łuki L_i. Spójrzmy teraz na dowód Lematu 3.1 (i Rysunek 3.2) dla cyklu C_1 równego $S_1 \cup L_1$ (oznaczmy końce ścieżki S_1 przez x, y), kompleksu C_2 równego C oraz łuku S_1. Wówczas, aby móc wykorzystać fragment brzegu $\partial_\infty W_{C_1}$ jako łuk, musi zachodzić warunek $(xx')^\infty \in \partial_\infty W_{C_1}$, w szczególności $x' \in L_1$ (to już może być problematycznym dodatkowym warunkiem przy wyborze wierzchołka x', ale pomińmy ten problem), i, dalej, początek rozważanego w tezie lematu łuku będzie przebiegał z $(xx')^\infty$ do $(xy)^\infty$ i, jeżeli $y \neq x'$, będzie miał co najmniej dwa wspólne punkty z blokiem wierzchołka x w brzegu $\partial_\infty W_C$, co powoduje, że, w rozważanej tu próbie zanurzenia grafu, łuk odpowiadający krawędzi (x, y) grafu G przecina się co najmniej trzykrotnie z cyklem $\partial_\infty W_C$ (z którego również brane są łuki do konstrukcji poszukiwanego zanurzenia). Stąd problem przy prowadzeniu takiej konstrukcji pojawia się, gdy w grafie G znajduje się wierzchołek stopnia większego niż 3 (bo wtedy musielibyśmy spełnić warunek $x' = y$ dla dwóch różnych wierzchołków y). To jest jedynie przykład występowania problemu, wydaje się on być głębszy, jednak występuje jedynie „wewnątrz bloków", przez co daje się ominąć poprzez zastosowanie słabych minorów, jak zostało to zaprezentowane w tym rozdziale.

Rozdział 4

Dowód głównego twierdzenia

W tym rozdziale zajmiemy się dowodem głównego twierdzenia tej pracy, dostarczającego warunku dostatecznego na to, by brzeg prostokątnej grupy Coxetera był homeomorficzny z krzywą Mengera. Pojawi się tu również dyskusja na temat konieczności niektórych z tych warunków. Najpierw sformułujemy ponownie Twierdzenie 1.1 i przypomnimy pewne fragmenty Uwagi 1.2.

Twierdzenie 1.1. *Niech N będzie nerwem prostokątnej grupy Coxetera W_N, która jest hiperboliczna. Jeżeli N jest nieseparowalny, nie jest pojedynczym sympleksem, jest* SG-*nieplanarny oraz dla każdego $n > 1$ i dowolnego sympleksu $\Delta \subseteq N$ zachodzi $H^n(N) = 0$ oraz $H^n(N \setminus \Delta) = 0$, to brzeg $\partial_\infty W_N$ jest homeomorficzny z krzywą Mengera.*

Uwaga 4.1. (i) Kompleks symplicjalny N jest nerwem pewnej prostokątnej grupy Coxetera wtedy i tylko wtedy, gdy jest flagowym kompleksem symplicjalnym.

(ii) Grupa W_N jest hiperboliczna wtedy i tylko wtedy, gdy jej nerw N spełnia warunek braku $\square$.

(iii) Dla sympleksu Δ kompleksu N przestrzeń $N \setminus \Delta$ powstaje poprzez usunięcie z przestrzeni N całego (tj. domkniętego) sympleksu Δ, w szczególności nie tylko jego wnętrza.

(iv) Nerw N jest nieseparowalny, gdy jest spójny, nie ma rozspajającej pary niesąsiednich wierzchołków, nie ma rozspajającego sympleksu i nie ma rozspajającego pełnego podkompleksu będącego zawieszeniem sympleksu.

Dowód. Dowód polega na sprawdzeniu, że brzeg $\partial_\infty W_N$ spełnia wszystkie warunki wymienione w charakteryzacji z Faktu 2.14.

Metryzowalność, zwartość. Jest to własność każdego brzegu prostokątnej grupy Coxetera, patrz Uwaga 2.10(ii).

Jednowymiarowość. Zachodzi następujący wzór na wymiar topologiczny brzegu: $\dim \partial_\infty W_N = \max\{n : \widetilde{H}^n(N) \neq 0 \text{ lub } \widetilde{H}^n(N \setminus \Delta) \neq 0 \text{ dla pewnego sympleksu } \Delta \subseteq N\}$ (gdzie $\widetilde{H}^*$ to kohomologie zredukowane), [14, dowód Lemma 2.5] (fragment dowodu prowadzący do tej formuły zachodzi dla dowolnego nerwu). Zatem z założenia $\dim \partial_\infty W_N \leqslant 1$. Jeżeli $\dim \partial_\infty W_N = 0$, to W_N byłaby wirtualnie wolna, [6, Corollary 8.5.6], co przeczyłoby faktowi, że wobec nieseparowalności i różności nerwu N od sympleksu, brzeg $\partial_\infty W_N$ ma 1 koniec, [14, Lemma 2.3].

Spójność. Wynika z założenia, że N jest różny od sympleksu i nieseparowalny, [14, Lemma 2.3].

Lokalna spójność. Wynika z założenia, że N jest różny od sympleksu, nieseparowalny, a W_N hiperboliczna, [14, pierwszy paragraf dowodu Lemma 3.1].

Brak punktów lokalnego rozspajania. Z założenia, że N jest różny od sympleksu, nieseparowalny, a W_N hiperboliczna wynika, że $\partial_\infty W_N$ nie ma punktów lokalnego rozspajania lub N jest triangulacją S^1 lub W_N jest sumą prostą podgrupy specjalnej W_K o nerwie K będącym triangulacją S^1 i skończonej podgrupy specjalnej W_L, [14, drugi paragraf dowodu Lemma 3.1]. Pozostaje pokazać, że dwa ostatnie przypadki nie zachodzą. Jeżeli N jest triangulacją S^1, mamy z flagowości $|N^{(0)}| \geqslant 4$, a zatem N ma parę niesąsiednich wierzchołków rozspajających. Jeżeli $W_N = W_K \oplus W_L$ dla K, L jak w drugim przypadku, to ponownie $|K^{(0)}| \geqslant 4$ oraz L jest sympleksem i N jest symplicjalnym joinem K z L. Czyli N jest rozspajany przez pewne symplicjalne zawieszenie sympleksu L. Obie te sytuacje są sprzeczne z nieseparowalnością.

Nigdzienieplanarność. Z Twierdzenia 3.4 w brzeg $\partial_\infty W_N$ zanurza się nieplanarny graf H. Z kolei na mocy [12, Lemma 7], jeżeli pewien punkt brzegu $\partial_\infty W_N$ miałby otoczenie planarne, to graf H zanurzałby się w tym otoczeniu, więc musiałby być planarny (dowód w istotny sposób polega na wykorzystaniu podstawowych własności działania grupy hiperbolicznej na swoim brzegu). □

Uwaga 4.2. (i) Z dowodu części o jednowymiarowości wynika, że kohomologiczny warunek występujący w treści Twierdzenia 1.1 jest warunkiem koniecznym na jednowymiarowość brzegu $\partial_\infty W_N$.

(ii) Warunek nieseparowalności i różności nerwu N od sympleksu jest warunkiem koniecznym, by brzeg $\partial_\infty W_N$ był spójny i nie miał punktów lokalnego rozspajania, [14, Lemma 2.2].

(iii) Powyższe dwie uwagi nie wymagają założenia hiperboliczności grupy W_N. Podobnie, w dowodzie zwartości, metryzowalności, jednowymiarowości i spójności nie jest potrzebna hiperboliczność. Pozbycie się lub osłabienie warunku hiperboliczności w dowodzie pozostałych trzech punktów wydaje się stanowić nietrywialne zadanie wymagające zastosowania nowych technik.

(iv) Planarny nerw zadaje prostokątną grupę Coxetera o planarnym brzegu (nie wymaga to zakładania hiperboliczności), [14, Lemma 2.4], zatem nieplanarność nerwu N jest warunkiem koniecznym, by brzeg $\partial_\infty W_N$ był krzywą Mengera. Dalszą część uwagi można traktować jako ciekawostkę, nie będziemy wracać do niej w pozostałej części pracy. Załóżmy odtąd hiperboliczność grupy W_N. Z dowodu nigdzienieplanarności wynika, że w każdy otwarty zbiór brzegu $\partial_\infty W_N$ zanurza się graf nieplanarny wtedy i tylko wtedy, gdy w (cały) brzeg $\partial_\infty W_N$ zanurza się graf nieplanarny. Co więcej, zachodzi następujące twierdzenie, [12, końcówka Section 3], gdzie powołano się na [4, 13]: zwarta, metryzowalna, spójna, lokalnie spójna przestrzeń bez punktów (globalnie) rozspajających jest nieplanarna wtedy i tylko wtedy, gdy zanurza się w nią graf nieplanarny. Gdy założymy dodatkowo nieseparowalność i różność nerwu N od sympleksu (warunki konieczne na mocy (ii)), na mocy zaprezentowanego dowodu Twierdzenia 1.1 brzeg $\partial_\infty W_N$ spełnia powyższe założenia, co łącznie (przy założeniu hiperboliczności grupy W_N, nieseparowalności i różności nerwu N od sympleksu) daje, że brzeg $\partial_\infty W_N$ jest nigdzienieplanarny wtedy i tylko wtedy, gdy w brzeg $\partial_\infty W_N$ zanurza się pewien graf nieplanarny. (To w pewien sposób nie skreśla poszukiwań zanurzenia nieplanarnego grafu w brzegu jako źródła nigdzienieplanarności brzegu, choć jasnym jest, że stosowany przez nas warunek SG-nieplanarności nerwu dokonuje tego w pewien bardzo szczególny sposób).

Rozdział 5

Zastosowania

W tym rozdziale będziemy stosować Twierdzenie 1.1 do znajdowania triangulacji pewnych przestrzeni topologicznych, które, jako nerwy, zadają prostokątne grupy Coxetera o brzegu będącym krzywą Mengera.

Uwaga 5.1. W tym rozdziale będziemy w wielu miejscu pisać o brzegu $\partial\sigma$ kompleksu symplicjalnego σ. W takiej sytuacji kompleks σ będzie zawsze triangulacją pewnej rozmaitości M_σ (zazwyczaj dysku), a mówiąc o brzegu $\partial\sigma$, zawsze będziemy mieli na myśli część kompleksu σ odpowiadającą brzegowi ∂M_σ rozmaitości M_σ. W szczególności, w sytuacji, gdy σ jest podkompleksem pewnego kompleksu τ, nie będzie nam chodzić o topologiczny brzeg zbioru σ w przestrzeni τ.

5.1. Triangulacje dwuwymiarowych kompleksów

W tym podrozdziale zajmiemy się triangulacjami przestrzeni będących pewną klasą dwuwymiarowych kompleksów.

Definicja 5.2. Krawędź dwuwymiarowego kompleksu symplicjalnego X jest *samotną krawędzią*, gdy nie istnieje 2-sympleks w kompleksie X, w którym jest ona zawarta.

W naszych rozważaniach ograniczymy się do kompleksów nie zawierających samotnych krawędzi. Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.3. *Niech X będzie dwuwymiarowym kompleksem symplicjalnym bez samotnych krawędzi. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) X dopuszcza triangulację N (tj. N jest homeomorficzna z X) taką, że N jest flagowym kompleksem symplicjalnym oraz brzeg $\partial_\infty W_N$ jest krzywą Mengera,

(ii) X dopuszcza nieskończenie wiele triangulacji takich, jak w (i),

(iii) X jest spójny, nieplanarny, nie ma rozspajającej pary punktów oraz $H^2X = 0$.

Uwaga 5.4. (i) Warunek braku samotnych krawędzi oznacza, że punkt $x \in X$ jest punktem lokalnego rozspajania wtedy i tylko wtedy, gdy jest wierzchołkiem (tj. $x \in X^{(0)}$), którego link jest niespójny. Zatem zbiór punktów lokalnego rozspajania w X jest dyskretny, więc dowolny 2-kompleks N homeomorficzny z X nie ma samotnych krawędzi i, w konsekwencji, wszystkie punkty lokalnego rozspajania kompleksu X są wierzchołkami w triangulacji N.

(ii) W przypadku dwuwymiarowego kompleksu X brak rozspajającej pary punktów w X pociąga brak punktu rozspajającego w X.

Zanim udowodnimy Twierdzenie 5.3, pokażemy prosty wniosek wynikający z podstawowych własności powierzchni.

Wniosek 5.5. *Niech M będzie zwartą powierzchnią (potencjalnie z brzegiem). Wówczas M dopuszcza triangulację (równoważnie, nieskończenie wiele triangulacji) będącą nerwem prostokątnej grupy Coxetera o brzegu będącym krzywą Mengera wtedy i tylko wtedy, gdy brzeg ∂M jest niepusty i M jest nieplanarna.*

Dowód. (Wniosku 5.5) Wiadomo, że M można striangulować, a ponieważ M jest rozmaitością, taka triangulacja nie będzie miała samotnych krawędzi oraz punktów lokalnego rozspajania. Wystarczy zatem sprawdzić, że $\partial M \neq \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $H^2M = 0$, a to wynika z klasycznych twierdzeń o powierzchniach. Dla pełności, przytaczamy je. Jeżeli $\partial M \neq \emptyset$, to, z klasyfikacji powierzchni, powierzchnię M można reprezentować jako dysk D^2 (z pewnymi utożsamieniami na brzegu ∂D^2) z wyciętymi rozłącznymi kopiami wnętrza dysku $\mathrm{int}D^2$ w liczbie równej liczbie składowych brzegu ∂M, co retrahuje się deformacyjnie na pewien graf, a więc $H^2M = 0$. Jeżeli $\partial M = \emptyset$, to M jest dwuwymiarową zwartą rozmaitością i, albo M jest orientowalna i $H_2M \cong \mathbb{Z}$, albo M jest nieorientowalna i H_1M ma torsję $\mathbb{Z}_2$, co z twierdzenia o współczynnikach uniwersalnych dla kohomologii daje, że $H^2M \neq 0$. □

Teraz przejdziemy do dowodu Twierdzenia 5.3.

Dowód. (Twierdzenia 5.3) *(ii)⇒(i).* Oczywiste.

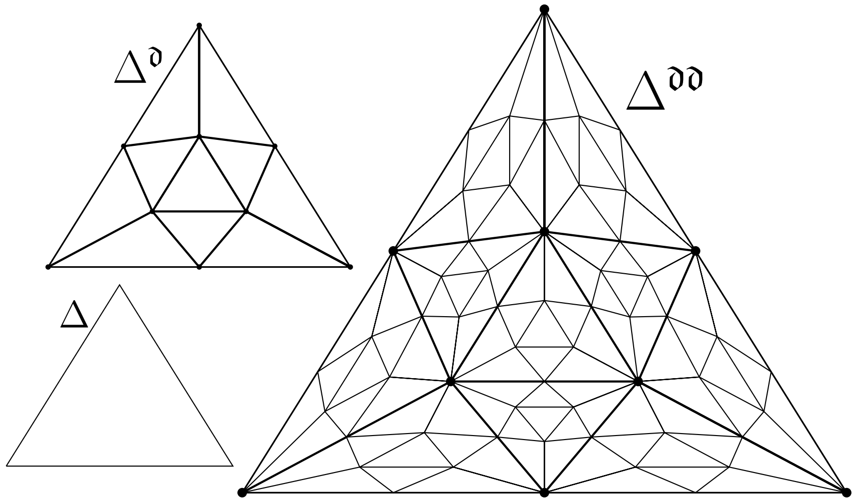
(i)⇒(iii). Nieplanarność X wynika z faktu, że planarne nerwy dają planarne brzegi, [14, Lemma 2.4]. Warunek $H^2X = 0$ wynika z Uwagi 4.2(i). Spójność X i brak rozspajającej pary punktów w X to warunki konieczne istnienia nieseparowalnej triangulacji kompleksu X, co wobec Uwagi 4.2(ii) kończy dowód tej implikacji.

(iii)⇒(ii). Dowód przebiega w oczekiwany sposób. Najpierw znajdziemy w X zanurzony nieplanarny graf, a następnie dorobimy do niego triangulację taką, by spełniała założenia Twierdzenia 1.1.

Poszukiwania grafu. Przestrzeń X jest zwarta, metryzowalna, spójna, lokalnie spójna, nieplanarna i nie ma punktów rozspajających, zatem zanurza się w niej pewien graf nieplanarny, [12, końcówka Section 3], na mocy twierdzenia Kuratowskiego możemy założyć, że jest to graf $\mathrm{K}_{3,3}$ lub K_5. (Warto zaznaczyć, że w mniejszej ogólności, na przykład gdy X jest triangulacją powierzchni, efekt uzyskany poprzez użycie powyższych twierdzeń można uzyskać w sposób bardziej elementarny). Pomijając pewien potencjalnie techniczny dowód spodziewanego rezultatu, możemy założyć, że X dopuszcza triangulację K, która zawiera jednowymiarowy podkompleks Γ, który jest krawędziowym podrozbiciem grafu $\mathrm{K}_{3,3}$ lub K_5.

Właściwa triangulacja. Chcemy teraz znaleźć triangulację kompleksu X podobną do K, która między innymi będzie flagowa i bez □. Temu celowi służy sposób podrozbijania triangulacji dwuwymiarowych kompleksów symplicjalnych wprowadzony w pracy [8]. Polega on na podrozbiciu każdej krawędzi na pół i podrozbiciu każdej dwuwymiarowej ściany fragmentem dwudziestościanu foremnego przyległym do jednej jego ściany, zob. Rysunek 5.1. Dla dwuwymiarowego kompleksu symplicjalnego L oznaczmy przez L^{∂} efekt takiego podrozbicia. Okazuje się mieć ono następujące własności.

Lemat 5.6. *Niech L będzie dowolnym dwuwymiarowym kompleksem symplicjalnym. Wówczas:*



Rysunek 5.1: Sympleks Δ i jego podrozbicia $\Delta^{\eth}$ i $\Delta^{\eth\eth}$.

(i) *$L^{\eth}$ jest flagowy i bez $\square$,*

(ii) *jeżeli Γ jest jednowymiarowym podkompleksem L, to podkompleks $\Gamma^{\eth}$ kompleksu $L^{\eth}$ jest pełnym podkompleksem,*

(iii) *jeżeli L jest spójny, nie ma samotnych krawędzi oraz rozspajającej pary wierzchołków, to kompleks $L^{\eth\eth}$ jest nieseparowalny.*

Zanim udowodnimy Lemat 5.6, pokażemy jak dokończyć dowód Twierdzenia 5.3. Za pomocą Lematu 5.6 nietrudno sprawdzić, że dla $n \geqslant 2$, n-krotne podrozbicie $K^{n\times\eth}$ kompleksu K spełnia wszystkie założenia Twierdzenia 1.1 za wyjątkiem warunku na kohomologie. Ten ostatni wynika z prostego rozumowania opartego na ciągu Mayera-Vietorisa, w którym korzysta się wyłącznie z faktu, że $K^{n\times\eth}$ jest spójny, dwuwymiarowy i nie jest pojedynczym sympleksem. Wystarczy sprawdzić, że dla sympleksu Δ zawartego w $K^{n\times\eth}$ mamy $H^2(K^{n\times\eth} \setminus \Delta) = 0$. Z własności kompleksów symplicjalnych sympleks Δ można rozdmuchać do (małego) otoczenia U takiego, że brzeg ∂U jest (homeomorficzny z) jednowymiarowym kompleksem symplicjalnym, U retrahuje się deformacyjnie na Δ oraz $U \setminus \Delta$ jest homotopijne z ∂U. Wówczas mamy następujący fragment ciągu dokładnego Mayera-Vietorisa: $H^2(K^{n\times\eth}) \to H^2(K^{n\times\eth} \setminus \Delta) \oplus H^2(U) \to H^2(U \cap (K^{n\times\eth} \setminus \Delta))$. Z założenia twierdzenia lewy wyraz jest zerowy, a z wyboru otoczenia U prawy wyraz jest zerowy, zatem $H^2(K^{n\times\eth} \setminus \Delta) = 0$. $\square$

Dowód. (Lematu 5.6) *(i).* Jest to [8, Proposition 2.1].

(ii). Wierzchołek grafu $\Gamma^{\eth}$ pochodzi od oryginalnego wierzchołka grafu Γ albo z podpodziału pewnej krawędzi grafu Γ, a każda krawędź grafu $\Gamma^{\eth}$ łączy parę wierzchołków obu z powyższych typów, a więc graf $\Gamma^{\eth}$ nie zawiera cyklu długości 3. Wystarczy zatem pokazać, że pomiędzy wierzchołkami grafu $\Gamma^{\eth}$ nie ma krawędzi, które nie należą do grafu $\Gamma^{\eth}$. Nietrudno stwierdzić (patrz Rysunek 5.1), że jeżeli wierzchołek v grafu $\Gamma^{\eth}$ pochodzi z podpodziału krawędzi e, to sąsiady v to końce krawędzi e, oraz pewne wierzchołki znajdujące się we wnętrzach ścian kompleksu L przyległych do krawędzi e. Zatem krawędź świadcząca o tym, że kompleks $\Gamma^{\eth}$ nie jest

pełny w L^{∂}, musiałaby łączyć dwa wierzchołki pochodzące od wierzchołków grafu Γ, co z konstrukcji nie jest możliwe.

(iii). Z założenia kompleks L nie ma rozspajającej pary wierzchołków, zatem kompleks $L^{\partial\partial}$ nie jest rozspajany przez parę niesąsiednich wierzchołków. Niech σ będzie spójnym pełnym podkompleksem kompleksu $L^{\partial\partial}$, który jest pojedynczym sympleksem lub zawieszeniem sympleksu. Pokażemy, że usunięcie σ nie rozspaja $L^{\partial\partial}$. Rozważmy graf I o wierzchołkach będących dwuwymiarowymi ścianami kompleksu L, w którym wierzchołki są połączone krawędzią dokładnie wtedy, gdy odpowiadające im ściany sąsiadują ze sobą, tzn. mają wspólną krawędź lub wierzchołek. Ponieważ L jest spójny i nie ma samotnych krawędzi, graf I jest spójny. Wystarczy pokazać, że graf I „przetrwa" usunięcie kompleksu σ, tzn. (a) dla dowolnej ściany Δ w kompleksie L, podkompleks $\Delta^{\partial\partial}$ nie zostanie rozspojony przez usunięcie σ, (b) dla dowolnej krawędzi e w kompleksie L podkompleks $e^{\partial\partial}$ nie jest zawarty w σ, (c) kompleks σ zawiera co najwyżej jeden wierzchołek kompleksu L oraz (d) graf I po usunięciu wszystkich krawędzi pochodzących od dowolnego wierzchołka kompleksu L jest nadal spójny. Stwierdzenie (d) wynika z braku wierzchołków rozspajających w kompleksie L oraz z faktu, że każda ścieżka w kompleksie L indukuje ścieżkę w grafie I. Stwierdzenie (c) wynika z faktu, że w kompleksie $L^{\partial\partial}$ każda para różnych wierzchołków L jest odległa co najmniej o 4, a średnica kompleksu σ wynosi co najwyżej 2. Stwierdzenie (b) wynika ze stwierdzenia (c). Pozostaje pokazać stwierdzenie (a). Najpierw pokażemy, że nie istnieje izometrycznie włożona w kompleks $\Delta^{\partial\partial}$ ścieżka o końcach w brzegu $\partial\Delta^{\partial\partial}$, która nie zawiera się w $\partial\Delta^{\partial\partial}$ i jest długości nie większej niż 2. Przypuśćmy, że istnieje ścieżka π o tych własnościach. Długość ścieżki π nie może wynosić 1, ponieważ z (ii) brzeg $\partial\Delta^{\partial\partial}$ jest pełnym podkompleksem $\Delta^{\partial\partial}$. Zatem długość π wynosi 2, ponownie z (ii) jej środkowy wierzchołek znajduje się poza brzegiem każdego z sympleksów kompleksu Δ^{∂}, a więc, na mocy prostego sprawdzenia, musi łączyć dwa kolejne wierzchołki brzegu $\partial\Delta^{\partial\partial}$, co przeczy temu, że ścieżka π jest izometrycznie włożona. Przypuśćmy, że usunięcie kompleksu σ (równoważnie $\sigma \cap \Delta^{\partial\partial}$) rozspaja kompleks $\Delta^{\partial\partial}$. Zauważmy, że, ponieważ z (i) kompleks $\Delta^{\partial\partial}$ jest flagowy i z (ii) brzeg $\partial\Delta^{\partial\partial}$ jest pełnym podkompleksem $L^{\partial\partial}$, kompleks $\Delta^{\partial\partial}$ jest pełnym podkompleksem $L^{\partial\partial}$. Stąd wynika, że kompleks $\sigma \cap \Delta^{\partial\partial}$ jest pełnym podkompleksem $L^{\partial\partial}$, więc $\sigma \cap \Delta^{\partial\partial}$ jest pełnym kompleksem $\Delta^{\partial\partial}$ oraz jest pojedynczym sympleksem, zawieszeniem sympleksu lub dwoma niesąsiednimi wierzchołkami (bo jest też pełnym podkompleksem σ). W ostatnim przypadku kompleks σ nie rozspaja kompleksu $\Delta^{\partial\partial}$, zajmijmy się więc pozostałym przypadkiem, gdy przekrój $\sigma \cap \Delta^{\partial\partial}$ jest spójny. Jeżeli ślad σ na brzegu $\partial\Delta^{\partial\partial}$ jest pusty lub spójny, to dla małego rozdmuchania (formalniej, standardowego otwartego otoczenia normalnego) U kompleksu $\sigma \cap \Delta^{\partial\partial}$ (w kompleksie $\Delta^{\partial\partial}$) widzimy, że $\sigma \cap \Delta^{\partial\partial}$ nie rozspaja U, a więc nie może rozspajać $\Delta^{\partial\partial}$. Zatem ślad σ na brzegu jest niepusty i niespójny, weźmy wierzchołki v, w należące do różnych składowych spójności śladu $\sigma \cap \partial\Delta^{\partial\partial}$. Na mocy obserwacji o ścieżkach wierzchołki v, w nie mogą być sąsiadami (w $\sigma \cap \Delta^{\partial\partial}$), zatem $\sigma \cap \Delta^{\partial\partial}$ jest zawieszeniem pewnego sympleksu, a v, w to jedyna para wierzchołków odległych o 2 (w $\sigma \cap \Delta^{\partial\partial}$). Niech u będzie dowolnym innym wierzchołkiem $\sigma \cap \Delta^{\partial\partial}$. Z obserwacji o ścieżkach wynika, że ścieżka v, u, w nie jest izometrycznie włożona (w $\Delta^{\partial\partial}$), co przeczy pełności $\sigma \cap \Delta^{\partial\partial}$ (w $\Delta^{\partial\partial}$), lub jest zawarta w brzegu $\partial\Delta^{\partial\partial}$, co przeczy wyborowi v, w. Sprzeczność. □

Uwaga 5.7. Punkt (ii) w Twierdzeniu 5.3 ma na celu zasugerować, że przypadek triangulacji N dwuwymiarowego kompleksu X bez samotnych krawędzi spełniającego warunki z punktu (iii) Twierdzenia 5.3, która daje brzeg $\partial_\infty W_N$ homeomorficzny z krzywą Mengera, jest być może generyczny (przynajmniej w klasie triangulacji N flagowych i takich, że grupa W_N jest hiperboliczna). W tej pracy nie zajmujemy się precyzowaniem tej myśli. Jednak dowód Twierdzenia 5.3 sugeruje, że „dostatecznie drobne" triangulacje kompleksu X powinny dawać w brzegu krzywą Mengera, ponieważ wówczas łatwiej powinno im być spełnić warunki nieseparowalności i SG-nieplanarności. Pewną realizację pojęcia „dostatecznej drobności" rozważamy w kolejnym podrozdziale.

5.2. Krótka dygresja o pewnej hipotezie

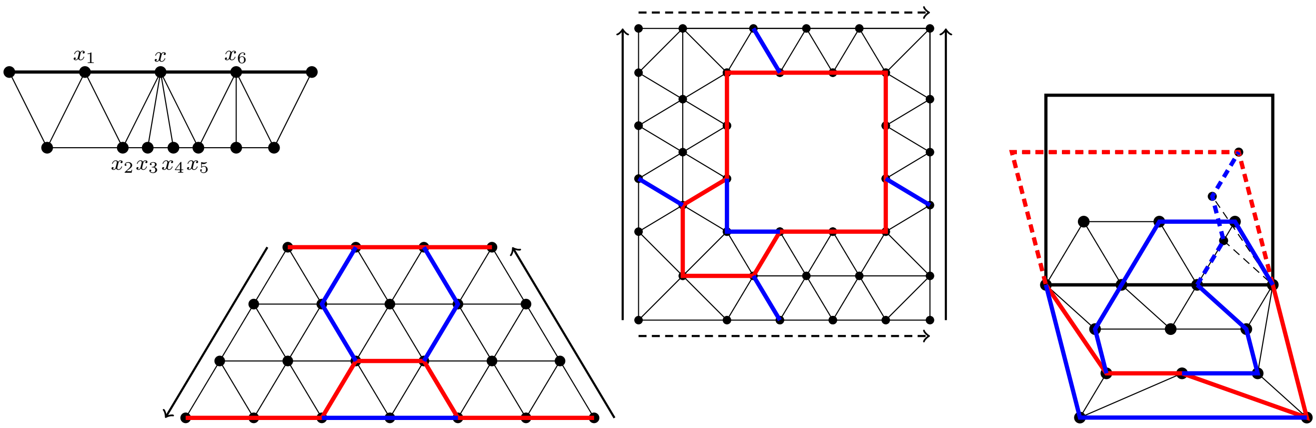
Dociekliwy czytelnik może zapytać, dlaczego rozważamy triangulacje powierzchni jako nerwy prostokątnych grup Coxetera. Może nawet złośliwie stwierdzić, że to dlatego, że rozumiemy w tym przypadku ich drugie kohomologie i, ogólniej, dość dobrze znamy ich naturę. Nie do końca tak jest – w tym podrozdziale naszkicujemy związek znajdowanych w poprzednim podrozdziale triangulacji z Hipotezą 5.8. Jednym z celów tej pracy jest dostarczenie przykładów na jej zachodzenie, a także rozważenie możliwości udowodnienia jej pewnych szczególnych podprzypadków metodami opierającymi się na Twierdzeniu 1.1, co w istocie sprowadza się do oceny siły metod zaprezentowanych w Rozdziale 3. Zaznaczamy jednak, że podrozdział ten ma charakter swobodnej pogadanki i nie dochodzimy w nim do zbyt wielu konkretnych konkluzji, oraz, że trudno jest przekazać wszystkie (drobne) intuicje i obserwacje powstałe w toku rozważania opisywanych zagadnień.

Hipoteza 5.8. *Niech K będzie flagowym kompleksem symplicjalnym z 3-wypukłą naturalną stratyfikacją. Wówczas brzeg $\partial_\infty W_K$ jest homeomorficzny z odbiciowym drzewem wielościanów $\mathcal{X}^r(K)$.*

W powyższej hipotezie pojawiają się trzy obiekty, których natura niekoniecznie jest znana. Naszym celem nie jest ich ścisłe wyjaśnienie, lecz naszkicowanie, co się pod nimi kryje, i rozważenie w kilku szczególnych przypadkach. *Odbiciowe drzewo wielościanów* to pewna zwarta przestrzeń metryczna. Dla rozważań w tej pracy istotne jest, że w przedstawionych dalej przykładach (z dużą pewnością) spodziewamy się, że będzie to krzywa Mengera. Pojęcie odbiciowych drzew wielościanów w przypadku grafów pojawia się w [15], gdzie Hipoteza 5.8 została udowodniona w przypadku grafów. *Naturalna stratyfikacja* kompleksu to rodzina jego podkompleksów zwanych *stratami*. Każde stratum jest PL-rozmaitością. Intuicyjnie wiąże się to z podziałem kompleksu na dobre kawałki, które są „dobrymi obiektami stałego wymiaru". Będzie to widoczne w przedstawionych przykładach. *3-wypukłość naturalnej stratyfikacji* to warunek mówiący, że każda suma stratów kompleksu K jest 3-wypukła w kompleksie K. Samej 3-wypukłości poświęcimy trochę więcej miejsca, więc zdefiniujemy ją dokładnie.

Definicja 5.9. Podkompleks A kompleksu K jest *3-wypukły* w K, gdy dla każdej pary wierzchołków v, w kompleksu A odległych w kompleksie K o $d < 3$, dowolna łamana długości d łącząca v z w w kompleksie K jest zawarta w kompleksie A.

Teraz przejdziemy do omówienia dwóch przykładów, a następnie przedstawimy pewne konkluzje wynikające z rozważań zawartych tamże. Wpierw wprowadzimy uproszczoną wersję Hipotezy 5.8 ograniczoną do obiektów występujących w Twierdzeniu 5.3, której te przykłady będą dotyczyły.



Rysunek 5.2: *Od lewej do prawej:* przykład fragmentu otoczenia kołnierzowego; pewne triangulacje wstęgi Möbiusa i torusa z wyciętym dyskiem (krawędzie znajdujące się wzdłuż strzałek są w naturalny sposób utożsamiane); schematyczne spojrzenie na triangulację trójdysku z zaznaczonymi wybranymi fragmentami kołnierzowych otoczeń brzegów płatów ∂P_i w płatach P_i. Na ostatnich trzech rysunkach zaznaczono graf Γ będący krawędziowym podrozbiciem grafu $\mathrm{K}_{3,3}$ zaświadczający o SG-nieplanarności narysowanych triangulacji – na czerwono zaznaczono cykl C, a na niebiesko ścieżki S_1, S_2, S_3 (oznaczenia pochodzą ze sformułowania Twierdzenia 3.4).

Hipoteza 5.10. *Niech K będzie flagową, nie zawierającą $\square$, triangulacją spójnego, nieplanarnego dwuwymiarowego kompleksu X nie posiadającego samotnych krawędzi i rozspajającej pary punktów, spełniającego $H^2X = 0$. Wówczas, jeżeli K spełnia warunek 3-wypukłości naturalnej stratyfikacji, to grupa W_K ma brzeg $\partial_\infty W_K$ homeomorficzny z krzywą Mengera.*

Triangulacje powierzchni. Poniżej postaramy się przedyskutować próbę podejścia do dowodu Hipotezy 5.10 z użyciem Twierdzenia 1.1 w szczególnym przypadku, gdy X jest powierzchnią, a K jej flagową triangulacją bez $\square$. W tym przypadku naturalna stratyfikacja kompleksu K składa się ze składowych brzegu ∂K oraz całego kompleksu K, więc 3-wypukłość naturalnej stratyfikacji sprowadza się do 3-wypukłości brzegu ∂K w kompleksie K, a założenia o powierzchni X sprowadzają się do tego, by była nieplanarna i miała niepusty brzeg (por. Wniosek 5.5).

Najpierw zajmiemy się warunkami koniecznymi. Warunek na kohomologie jest spełniony (zob. dowód Twierdzenia 5.3). Różność kompleksu K od sympleksu wynika z nieplanarności powierzchni X. Warunek nieseparowalności można pokazać w sposób analogiczny do prezentowanego w dowodzie Lematu 5.6(iii) – w istocie, w kluczowym momencie, dowodziliśmy tam najpierw 3-wypukłości brzegu $\partial\Delta^{\partial\partial}$ w kompleksie $\Delta^{\partial\partial}$, a następnie wnioskowaliśmy z niej nieseparowalność kompleksu $\Delta^{\partial\partial}$. Zanim przejdziemy do (najtrudniejszego) warunku związanego z nieplanarnością, zastanówmy się dokładniej, co oznacza 3-wypukłość brzegu w całej powierzchni.

Fakt 5.11. *Niech L będzie różną od 2-sympleksu flagową triangulacją powierzchni z brzegiem. Wówczas brzeg ∂L jest 3-wypukły w L wtedy i tylko wtedy, gdy ∂L ma otoczenie kołnierzowe w L (zob. Rysunek 5.2) zdefiniowane następująco. Dla dowolnego wierzchołka $x \in \partial L$ (wówczas link x jest ścieżką $x_1, \ldots, x_n$) spełnione są warunki:*

(i) $x_1, x_n \in \partial L$, (ii) x, x_1, x_2 oraz x, x_{n-1}, x_n rozpinają po jednym 2-sympleksie, (iii) $x_2, \dots, x_{n-1} \notin \partial L$, (iv) $n \geqslant 4$, (v) jedyne sąsiady wierzchołka x_2 należące do brzegu ∂L to x, x_1, a dla wierzchołka x_{n-1} to x, x_n, (vi) jedyny sąsiad wierzchołka x_k dla $k = 2, \dots, n-1$ należący do brzegu ∂L to x.

Dowód. ($\Rightarrow$). *(i,ii).* Warunki te są spełnione w każdej triangulacji. *(iii).* Jeżeli $x_k \in \partial L$ ($k = 2, \dots, n-1$), to z 3-wypukłości krawędź (x, x_k) należy do brzegu ∂L, sprzeczność. *(iv).* Nierówność $n \geqslant 3$ wynika z różności L od sympleksu, a $n \neq 3$ z 3-wypukłości i punktu (iii). *(v).* Wystarczy rozważyć przypadek wierzchołka x_2. Niech $y \in \partial L$ będzie sąsiadem wierzchołka x_2 różnym od x, x_1. Z (iii) i (iv) wierzchołek y nie może być sąsiadem x_1. Ale wtedy z 3-wypukłości mamy, że $x_2 \in \partial L$, co jest sprzeczne z (iii). *(vi).* Jeżeli sąsiadem x_k jest wierzchołek y równy x_1 lub x_n, z flagowości kompleksu L wierzchołki x, y, x_k rozpinają 2-sympleks, co przeczy brzegowości krawędzi (x, y). W przeciwnym przypadku z 3-wypukłości wierzchołek x_k jest w brzegu ∂L, co przeczy punktowi (iii). ($\Leftarrow$). Jest to bezpośrednie sprawdzenie 3-wypukłości z definicji, pozostawiamy je jako ćwiczenie. $\square$

Warunek SG-nieplanarności wymaga umieszczenia w 1-szkielecie kompleksu K grafu nieplanarnego (którego fragmenty będziemy nazywać zgodnie z oznaczeniami z Twierdzenia 3.4) tak, by pewne jego fragmenty były pełnymi podkompleksami K, co wymaga pewnej przestrzeni, natomiast z Faktu 5.11 widzimy, że warunek 3-wypukłości brzegu wymusza, że kompleks jest „szeroki" jedynie wokół brzegów. Zaskakująco, okazuje się to być wystarczające w pewnych przypadkach, które wydają się być „minimalnymi triangulacjami", zob. Rysunek 5.2. Można zauważyć, że umieszczanie grafu nieplanarnego $K_{3,3}$ w triangulacjach z Rysunku 5.2 przebiega względem pewnego schematu, który wydaje się nam być całkiem skuteczny: cykl C obiega składową brzegu ∂K, w jednym miejscu odchylając się od niej, by zostawić miejsce na ścieżkę S_1. Pozostałe ścieżki S_2, S_3 udaje nam się dobrze poprowadzić, i to zdaje się być głównym problemem – należy je z sobą „przepleść", a to korzysta z globalnej struktury powierzchni X, przez co zmusza nas do znajomości globalnych własności triangulacji K, co wydaje się być trudne do kontrolowania i generować sporo przypadków.

Triangulacje trójdysku. Definiujemy trójdysk jako przestrzeń $\mathsf{T} \times [0,1]$, gdzie T to przestrzeń będąca literą „T" (tj. homeomorficzna z trzema odcinkami o wspólnym końcu). Inaczej mówiąc, trójdysk składa się z trzech dysków P_1, P_2, P_3, zwanych w tej pracy *płatami*, przyklejonych do siebie wzdłuż wspólnej ścieżki π. Jego stratami są oba końce ścieżki π, ścieżka π, pozostałe względem ścieżki π fragmenty brzegów ∂P_i płatów P_i oraz płaty P_i.

Ponownie spróbujemy udowodnić Hipotezę 5.10 przy pomocy Twierdzenia 1.1 w przypadku, gdy przestrzeń X jest trójdyskiem. Niech K będzie flagową triangulacją bez $\square$ trójdysku spełniającą warunek 3-wypukłości naturalnej stratyfikacji. Warunek 3-wypukłości i flagowość (w szczególności Fakt 5.11) implikują wówczas, że długość ścieżki π wynosi co najmniej 3, co więcej odległość pomiędzy jej końcami w brzegach płatów ∂P_i wynosi co najmniej 3 oraz brzegi płatów ∂P_i mają kołnierzowe otoczenia w płatach P_i.

Warunki konieczne sprawdza się podobnie, jak w przypadku powierzchni, więc je pominiemy. W związku z warunkiem na nieplanarność, okazuje się, że na tyle mocno kontrolujemy postać triangulacji K, że korzystając ze strategii zaprezentowanej przy okazji rozważania triangulacji powierzchni, możemy pokazać, że K jest

SG-neplanarny w przypadku, gdy dodamy założenie, że istnieje płat P_i taki, że podkompleks płatu P_i złożony z 2-sympleksów przyległych do brzegu ∂P_i jest pełnym podkompleksem P_i (innymi słowy, mniej formalnie, pomiędzy wierzchołkami kołnierzowego otoczenia nie ma innych krawędzi, niż krawędzie kołnierzowego otoczenia). Nie będziemy zajmować się formalnym dowodem tego faktu, zamiast tego odsyłamy do Rysunku 5.2 i pozostawiamy jako ćwiczenie sprawdzenie, że narysowany sposób zanurzenia grafu $\mathrm{K}_{3,3}$ istotnie się uogólnia (wskazówka: inne triangulacje trójdysku można w pewnym sensie traktować jako podpodziały tej narysowanej).

Konkluzje. Nie potrafiliśmy udowodnić z wykorzystaniem Twierdzenia 1.1 pewnych szczególnych przypadków Hipotezy 5.10, będącej szczególnym przypadkiem Hipotezy 5.8. Z drugiej strony, wydaje się, że ciężko byłoby udowodnić, że Twierdzenie 1.1 nie daje się do tego zastosować. Istnienie takowego zastosowania budzi również dylematy natury estetycznej i praktycznej, gdyż wygląda na to, że (ewentualny) dowód wykorzystujący to twierdzenie będzie kombinatoryczny i zawierający sporo przypadków. Jednak, w chwili obecnej, wydaje nam się, że Twierdzenie 1.1 powinno pozwalać na dowodzenie pewnych przykładów Hipotezy 5.10, gdy odpowiednio (prawdopodobnie nieznacznie) wzmocni się jej założenia (co zrobiliśmy w przypadku trójdysku), najprawdopodobniej poprzez „dorobienie” tych założeń do wcześniej wymyślonego sposobu zanurzania grafu nieplanarnego. Wątków poruszonych w powyższych konkluzjach nie rozbudowujemy w innych fragmentach pracy.

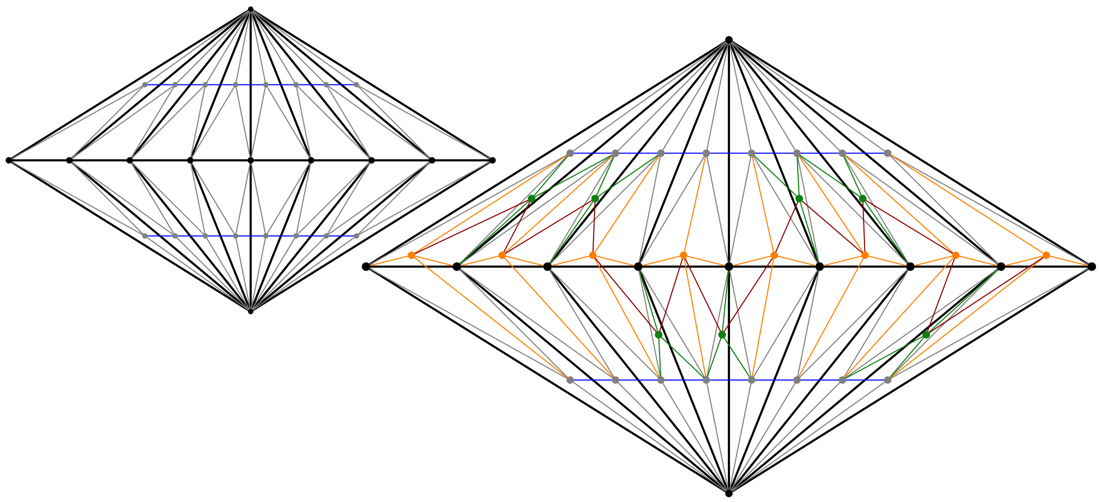
5.3. Triangulacje dysków D^n

W tym podrozdziale striangulujemy dysk D^3 tak, by triangulacja ta dawała prostokątną grupę Coxetera o brzegu homeomorficznym z krzywą Mengera. Zjawisko tu zaprezentowane może być interesujące, ponieważ z warunku kohomologicznego z Twierdzenia 1.1 wynika, że taka triangulacja musi być dość szczególna – wszystkie jej wierzchołki muszą leżeć na brzegu ∂D^3. Co więcej, warunek ów implikuje (np. po zastosowaniu ciągu Mayera-Vietorisa), że próbując znaleźć analogiczną triangulację dysku D^n, musimy się ograniczyć do triangulacji mających wszystkie $(n-3)$-sympleksy zawarte w brzegu ∂D^n. Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.12. *Dysk D^n dopuszcza triangulację, która jest nerwem prostokątnej grupy Coxetera o brzegu homeomorficznym z krzywą Mengera wtedy i tylko wtedy, gdy $n \geqslant 3$.*

Dowód. Dowód w istocie sprowadza się do przypadku $n = 3$, dokładniej do istnienia triangulacji dysku D^3 spełniającej założenia Twierdzenia 1.1. Istotnie, dla $n < 3$ dyski D^n są planarne, więc ich triangulacje mogą zadawać wyłącznie prostokątne grupy Coxetera o planarnych brzegach, [14, Lemma 2.4]. Z drugiej strony, nietrudno stwierdzić, że jeżeli N jest flagowym kompleksem symplicjalnym bez $\square$, to symplicjalny stożek nad N, $\mathrm{Cone}(N)$, jest również flagowym kompleksem symplicjalnym bez $\square$ oraz mamy kanoniczny izomorfizm $W_{\mathrm{Cone}(N)} \cong W_N \oplus \mathbb{Z}_2$, co w szczególności, z podstawowych własności brzegu Gromowa (równemu w tym przypadku brzegowi $\mathtt{CAT(0)}$), daje że $\partial_\infty W_N \cong \partial_\infty W_{\mathrm{Cone}(N)}$. Zatem, ponieważ $\mathrm{Cone}(D^n) \cong D^{n+1}$, aby otrzymać odpowiednią triangulację dysku D^n dla $n > 3$ wystarczy przyłożyć odpowiednią liczbę razy operację symplicjalnego stożka do triangulacji dla dysku D^3. Odtąd zajmujemy się wyłącznie przypadkiem $n = 3$.

Konstrukcja. Konstrukcję można podzielić na 6 etapów **(e1)**–**(e6)**. Każdemu z



Rysunek 5.3: *Po lewej:* 1-szkielet powstały w etapach **(e1)**–**(e3)**. *Po prawej:* 1-szkielet po wszystkich etapach. Z rysunków usunięto **oś** i rozcięto kompleks wzdłuż pewnego **południka**, usuwając niektóre krawędzie i wierzchołki wokół tego rozcięcia.

nich przyporządkowujemy kolor, którego będziemy konsekwentnie używać w rozważaniach i na rysunkach – sympleksy pojawiające się w etapie (ei) będziemy kolorować na odpowiadający temu etapowi kolor i będziemy nazywać je (ei)-sympleksami, ta konwencja przenosi się na różne obiekty powstałe w danym etapie. W szczególności, w toku konstrukcji, nie wszystkie krawędzie (ei)-3-sympleksów będą (ei)-krawędziami, a jedynie te, które nie będą należeć do żadnego (ej)-3-sympleksu dla $j < i$. Rysunek 5.3 jest przydatny do zrozumienia poniższej konstrukcji, a widoczne na nim położenie triangulacji będzie używane do końca dowodu.

- **(e1)** Bierzemy **symplicjalny join cyklu C_8 długości 8 z krawędzią** E. W naturalny sposób nazwijmy fragmenty jego 1-szkieletu **osią** (krawędź E), **równikiem** (cykl C_8) i **południkami**, a końce osi **biegunami północnym** i **południowym**.
- (e2) Do każdej **(e1)**-ściany zewnętrznej przyklejamy (jedną ścianą) 3-sympleks.
- **(e3)** Dla każdej pary sąsiednich (e2)-3-sympleksów, które sąsiadują wzdłuż krawędzi **południka**, wklejamy 3-sympleks pomiędzy nie, tzn. tak, aby jedna jego ściana była przyklejona do prawej ściany jednego z nich, a inna do lewej ściany drugiego z nich.
- (e4) Dla każdej pary (e2)-3-sympleksów $\triangle_1, \triangle_2$, które sąsiadują ze sobą wzdłuż krawędzi **równika**, wklejamy symplicjalne zawieszenie 2-sympleksu tak, by pewien jego podkompleks będący zawieszeniem krawędzi był przyklejony jedną swoją ścianą do dolnej ściany odpowiedniego z (e2)-3-sympleksów $\triangle_1, \triangle_2$, a drugą ścianą do górnej ściany drugiego z (e2)-3-sympleksów $\triangle_1, \triangle_2$.
- (e5) Do niektórych zewnętrznych ścian **(e3)**-3-sympleksów, które dotykają **równika**, przyklejamy jedną ścianą po jednym 3-sympleksie w następujący sposób. Oznaczmy $N_1, \ldots, N_8$ takie ściany znajdujące się powyżej **równika** (w kolejności cyklicznej), a $S_1, \ldots, S_8$ takie ściany znajdujące się poniżej **równika** (w kolejności cyklicznej) tak, by ściana N_i sąsiadowała ze ścianą S_i. Przyklejamy 3-sympleksy do ścian $N_1, N_2, S_3, S_4, N_5, N_6, S_7, S_8$.

(e6) Dla każdej pary 3-sympleksów Δ_4, Δ_5 takiej, że Δ_i jest (ei)-3-sympleksem, które przylegają do siebie wzdłuż pewnej (e2)-krawędzi e wklejamy 3-sympleks tak, by jedna jego ściana przylegała do zewnętrznej ściany sympleksu Δ_4 przyległej do (e2)-krawędzi e, a druga jego ściana przylegała do zewnętrznej ściany sympleksu Δ_5 przyległej do (e2)-krawędzi e. (Z nowo dodanych krawędzi powstaje wzór przypominający $\mathsf{w}^{\mathsf{M}}\mathsf{w}^{\mathsf{M}}$.)

Ogólne obserwacje. Całą konstrukcję można rozłożyć na sekwencję operacji polegających na przyklejeniu pojedynczego 3-sympleksu do pewnego trójwymiarowego kompleksu $\mathcal{T}$ wzdłuż jednej ściany lub pary sąsiednich ścian znajdujących się na brzegu $\partial\mathcal{T}$. Nietrudno indukcyjnie można pokazać, że na każdym etapie $\mathcal{T}$ jest triangulacją dysku D^3 o wszystkich wierzchołkach leżących na brzegu ∂D^3. Odtąd skonstruowaną triangulację będziemy oznaczać $\mathcal{T}$ oraz nazywać jej podkompleks σ *zewnętrznym*, gdy σ zawiera się w brzegu $\partial\mathcal{T}$ i *wewnętrznym* w przeciwnym wypadku. W szczególności wszystkie **(e1)**-krawędzie są wewnętrzne, wszystkie krawędzie z etapów **(e3)**–**(e6)** są zewnętrzne, a w przypadku (e2)-krawędzi mogą wystąpić obie możliwości.

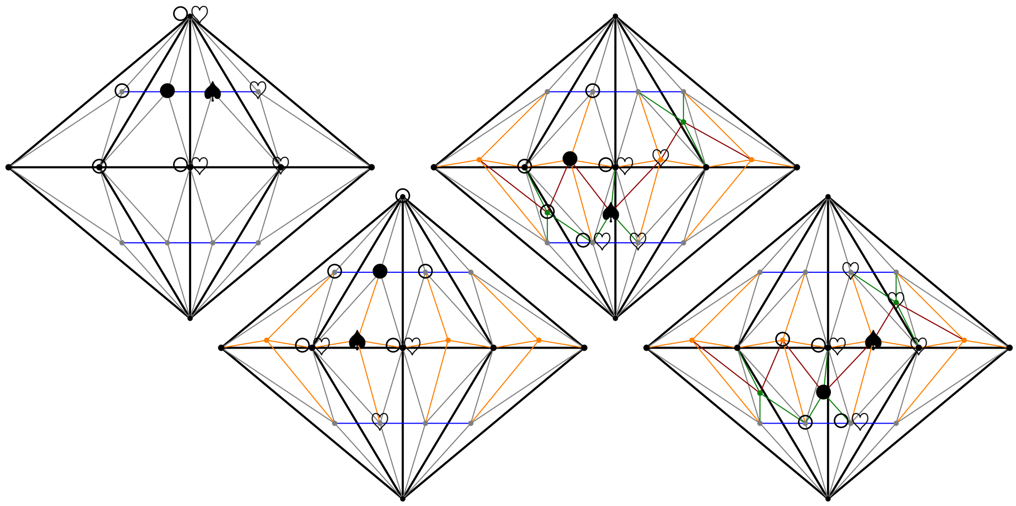
Nieplanarność. W kompleksie $\mathcal{T}$ jako podkompleks zawiera się krawędziowe podrozbicie Γ grafu $\mathrm{K}_{3,3}$ w następujący sposób: bierzemy wszystkie **(e6)**-krawędzie (tj. $\mathsf{w}^{\mathsf{M}}\mathsf{w}^{\mathsf{M}}$), **oś** oraz dwie zewnętrzne ścieżki długości 2 łączące **biegun południowy** z środkowymi (e4)-wierzchołkami fragmentów M i dwie zewnętrzne ścieżki długości 2 łączące **biegun północny** z środkowymi (e4)-wierzchołkami fragmentów W. Można sprawdzić, że Γ to pełny podkompleks $\mathcal{T}$, który jest krawędziowym podrozbiciem grafu $\mathrm{K}_{3,3}$ takim, że każdej krawędzi grafu $\mathrm{K}_{3,3}$, za wyjątkiem tej, której odpowiada **oś**, odpowiada ścieżka długości co najmniej 2. Zatem, na mocy Uwagi 3.5 spełnione jest uproszczone założenie, na to, by kompleks $\mathcal{T}$ był SG-nieplanarny, co jest jednym z założeń Twierdzenia 1.1.

Brak pustych kwadratów i trójkątów. Brak pustych trójkątów (w skrócie: *brak* $\triangle$) jest częścią warunku na flagowość kompleksu $\mathcal{T}$ i oznacza, że nie ma w 1-szkielecie $\mathcal{T}^{(1)}$ grafu pełnego o 3 wierzchołkach, który nie rozpina 2-sympleksu. Zwieńczenie argumentacji za flagowością kompleksu $\mathcal{T}$ pojawi się pod koniec dowodu twierdzenia.

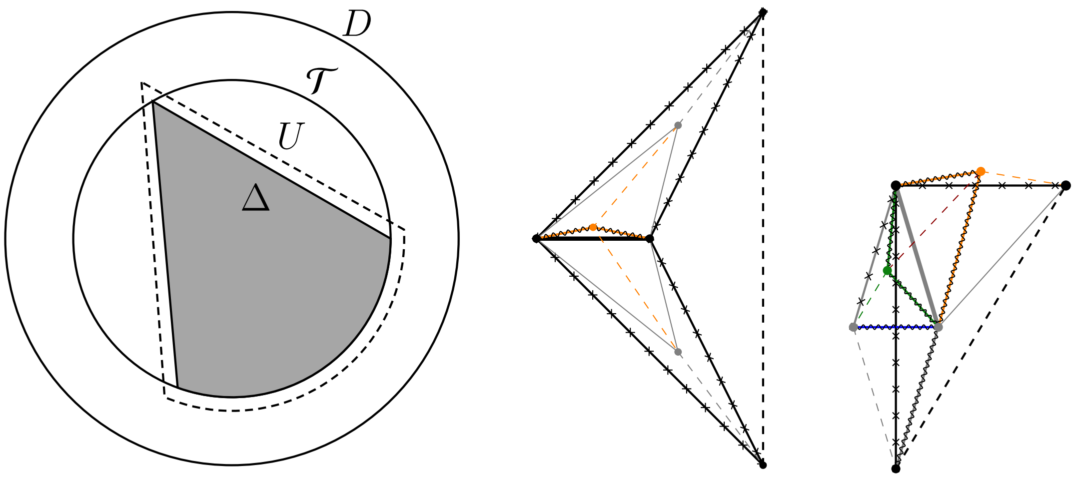
Dowód tej części polega na indukcyjnym sprawdzeniu, że kompleks otrzymany po każdym z etapów **(e1)**–**(e6)** jest bez $\triangle$ i bez $\square$. Etap **(e1)** można potraktować jako wzięcie dwukrotnego symplicjalnego stożka nad cyklem długości 8, który jest bez $\triangle$ i bez $\square$, a operacja stożka zachowuje te własności. Etapy (e2), **(e5)** nie mogą wprowadzić $\triangle$ i $\square$, ponieważ polegają na doklejaniu 3-sympleksów wzdłuż pojedynczych ścian (a ta operacja również zachowuje własność braku $\triangle$ i $\square$). Etap (e4) można traktować jako sekwencję wklejania ośmiu (e4)-sympleksów powyżej **równika** (wzdłuż jednej ściany), a następnie ośmiu (e4)-sympleksów poniżej **równika** (wzdłuż dwóch ścian), zatem potencjalny nowy $\triangle$ lub $\square$ zawiera pewną (e4)-krawędź mającą 1 z końców w pewnym (e2)-wierzchołku. Podobnie, etapy **(e3)** i **(e6)**, z dokładnością do symetrii, dostarczają trzech rodzajów krawędzi, które mogą być zawarte w $\triangle$ lub $\square$. Rysunek 5.4 zawiera wszystkie 4 nie rozważone powyżej przypadki, (z dokładnością do symetrii), a opis zawarty pod nim pozwala zakończyć dowód tej części.

Jednowymiarowość. Ogólne podejście w dalszej części dowodu polega na widzeniu $\mathcal{T}$ częściej jako dysk D^3 ze strukturą topologiczną, niż jako kompleks symplicjalny, choć oba te podejścia się mieszają.

Niech Δ będzie sympleksem kompleksu $\mathcal{T}$. Przedstawmy $\mathcal{T}$ jako trójwymiarowy



Rysunek 5.4: Cztery pozostałe przypadki w sprawdzaniu hiperboliczności triangulacji $\mathcal{T}$. Symbolami ● i ♠ oznaczono wierzchołki krawędzi potencjalnie należącej do pewnego △ lub □, a symbolami ○ i ♡ sąsiady odpowiednio ● i ♠. Wystarczy sprawdzić, że każdy wierzchołek oznaczony jednocześnie ○ i ♡ rozpina razem z ● i ♠ 2-sympleks oraz nie ma krawędzi łączącej pewien wierzchołek oznaczony wyłącznie ○ z pewnym wierzchołkiem oznaczonym wyłącznie ♡.



Rysunek 5.5: *Po lewej:* sytuacja w dowodzie jednowymiarowości, dla uproszczenia przedstawiona w wymiarze o 1 niższym. *Na środku i po prawej:* kompleks $\mathcal{R}_e$ w pozostałych dwóch przypadkach w dowodzie nieseparowalności kompleksami wymiaru 2 – z lewej przypadek, gdy e jest **(e1)**-krawędzią, z prawej, gdy e jest **(e2)**-krawędzią. Linią pogrubioną zaznaczono krawędź e, liniami przerywanymi zaznaczono krawędzie grafu $\mathcal{G}_e$, linią zaznaczono wszystkie krawędzie łamanych, które na pewno są zewnętrzne, a linią wszystkie krawędzie łamanych, które na pewno są wewnętrzne.

dysk zawarty w standardowy sposób względem topologii kawałkami liniowej w większym trójwymiarowym dysku symplicjalnym D. Wówczas Δ jest podprzestrzenią D, rozważmy U – standardowe otwarte otoczenie normalne Δ w D. Zob. Rysunek 5.5. Wówczas U jest homeomorficzny z wnętrzem dysku $\mathrm{int}D^3$ oraz $\mathcal{T} \setminus U$ jest retraktem deformacyjnym $\mathcal{T} \setminus \Delta$, a więc odtąd zapominamy o sympleksie Δ i będziemy zajmować się zbiorem U. Ciąg Mayera-Vietorisa dla pary zbiorów $\mathcal{T} \setminus U$ oraz $(D \setminus \mathrm{int}\mathcal{T}) \setminus U$ daje ciąg dokładny $H^k(D \setminus U) \to H^k(\mathcal{T} \setminus U) \oplus H^k((D \setminus \mathrm{int}\mathcal{T}) \setminus U) \to H^k(\partial\mathcal{T} \setminus U)$. Ponieważ U jest ściągalny i zawarty we wnętrzu $\mathrm{int}D$, przestrzeń $D \setminus U$ jest retraktem deformacyjnym dysku D z wyjętym punktem, a więc przestrzeń $D \setminus U$ jest homotopijnie równoważna z brzegiem $\partial D \cong S^2$. Przestrzeń $(D \setminus \mathrm{int}\mathcal{T}) \setminus U$ jest retraktem deformacyjnym przestrzeni $D \setminus \mathrm{int}\mathcal{T}$, która jest homotopijnie równoważna ze sferą S^2. Przestrzeń $\partial T \setminus U$ jest dwuwymiarową rozmaitością, której każda składowa spójności ma niepusty brzeg (bowiem $U \cap \partial\mathcal{T} \neq \emptyset$), a więc jest homotopijnie równoważna z pewnym jednowymiarowym kompleksem, zob. dowód Wniosku 5.5. Dla $k = 2$ daje nam to ciąg dokładny $\mathbb{Z} \to H^2(\mathcal{T} \setminus U) \oplus \mathbb{Z} \to 0$, toteż lewy homomorfizm jest epimorfizmem, zatem $H^2(\mathcal{T} \setminus U) = 0$. Dla $k > 2$ skrajne wyrazy rozważanego ciągu dokładnego się zerują, zatem $H^k(\mathcal{T} \setminus U) = 0$.

Nieseparowalność. Nieseparowalność punktem i parą niesąsiednich punktów jest oczywista. Podejście do dowodu nieseparowalości w wyższym wymiarze sprowadza się do następującej obserwacji.

Fakt 5.13. *Niech σ będzie pełnym podkompleksem wymiaru co najmniej 1 kompleksu $\mathcal{T}$ będącym sympleksem lub zawieszeniem sympleksu. Wówczas jeżeli σ rozspaja $\mathcal{T}$, to również rozspaja brzeg $\partial\mathcal{T}$.*

Dowód. Równoważnie możemy wyrzucić standardowe otwarte otoczenie normalne U kompleksu σ. Wystarczy pokazać, że każdy punkt x w $\mathcal{T}$ ma w swojej składowej łukowej spójności w $\mathcal{T} \setminus U$ punkt z brzegu $\partial\mathcal{T} \setminus U$ – istotnie w $\mathcal{T}$ istnieje łuk γ łączący x z brzegiem $\partial\mathcal{T}$, i jeżeli γ przecina brzeg ∂U, to od tego miejsca możemy dojść, poruszając się po brzegu ∂U, do brzegu $\partial\mathcal{T}$, ponieważ U niewiele różni się od σ, którego brzeg $\partial\sigma$ jest spójny i dotyka brzegu $\partial\mathcal{T}$ (ponieważ każdy wierzchołek kompleksu $\mathcal{T}$ należy do brzegu $\partial\mathcal{T}$). □

Metoda dowodu nieseparowalności będzie polegać na sprawdzaniu, czy ślady odpowiednich kompleksów na brzegu $\partial\mathcal{T} \cong S^2$ rozspajają ten brzeg, odtąd będziemy korzystać wyłącznie z tego warunku dostatecznego nieseparowalności. Nietrudno można już zauważyć nieseparowalność 1-sympleksem lub zawieszeniem 0-sympleksu.

Nieseparowalność kompleksami wymiaru 2, brak pustych K_4 *i brak* K_5. Dowodzimy jednocześnie tych trzech waruków, ponieważ argumentacja jest w dużej części wspólna. Warunki braku pustych K_4 i braku K_5 są częścią sprawdzania flagowości triangulacji $\mathcal{T}$. Brak pustych K_4 polega na tym, że w 1-szkielecie $\mathcal{T}^{(1)}$ nie ma podgrafu (izomorficznego z) K_4, który nie rozpina 3-sympleksu. Brak K_5 polega na tym, że w 1-szkielecie $\mathcal{T}^{(1)}$ nie ma podgrafu (izomorficznego z) K_5.

Dowód nieseparowalności kompleksami wymiaru 2 korzysta z następującego faktu, który jest prostą konsekwencją Faktu 5.13 i rozważenia, które z kilku nieskomplikowanych zbiorów rozspajają sferę S^2.

Fakt 5.14. *(i) 2-sympleks Δ rozspaja brzeg $\partial\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \cap \partial\mathcal{T} = \partial\Delta$.*

(ii) Jeżeli zawieszenie σ pewnego 1-sympleksu rozspaja brzeg $\partial\mathcal{T}$, to pewien 2-sympleks kompleksu σ rozspaja $\partial\mathcal{T}$ lub $\sigma \cap \partial\mathcal{T} = \partial\sigma$.

Jeżeli pewien 2-sympleks Δ rozspaja $\partial\mathcal{T}$, to z Faktu 5.14 jego ślad na brzegu $\partial\mathcal{T}$ to jego wszystkie krawędzie. Wyróżnijmy z nich tę, która pojawiała się w najwcześniejszym z etapów **(e1)**–**(e6)** (jeżeli jest kilka takich, wyróżniamy dowolną z nich), nazwijmy ją e. Natomiast, jeżeli pewne zawieszenie σ 1-sympleksu e rozspaja $\mathcal{T}$, ale żaden z jego 2-sympleksów nie rozspaja $\mathcal{T}$, to wyróżnijmy krawędź e. To daje pewną sugestię metody dowodowej, która nie wydaje się być wybitnie finezyjna, ale z powodu licznych symetrii triangulacji $\mathcal{T}$ daje się relatywnie łatwo i przejrzyście przeprowadzić, a same przypadki są nieskomplikowane – rozważamy kolejno wszystkie 1-sympleksy e kompleksu $\mathcal{T}$ i upewniamy się, że 1-sympleks e nie został wyróżniony z żadnego z powodów wymienionych dotychczas w tym paragrafie. Dokładniej, jeżeli e jest 1-sympleksem wewnętrznym, sprawdzamy warunek ($\mathfrak{n}1$): nie ma dwóch ścieżek długości 2 łączących końce e takich, że ścieżki te są zawarte w brzegu $\partial\mathcal{T}$, a ich środkowe wierzchołki nie są połączone krawędzią (przypominamy o pełności kompleksu rozspajającego w definicji nieseparowalności), a jeżeli e jest krawędzią zewnętrzną, sprawdzamy warunek ($\mathfrak{n}2$): nie ma ścieżki γ długości 2 łączącej końce e złożonej z krawędzi zewnętrznych zbudowanych w nie wcześniejszym etapie, niż e, oraz takich, że $\gamma \cup e$ nie ogranicza ściany zewnętrznej.

Rozważmy graf K_4 lub K_5 będący podgrafem $\mathcal{T}^{(1)}$. Wyróżnijmy w nim tę krawędź e, która powstała w najwcześniejszym z etapów **(e1)**–**(e6)**. W przypadku, gdy tym grafem jest K_5 (równoważnie) oznacza to, że w $\mathcal{T}$ znajduje się 1-szkielet symplicjalnego joinu krawędzi e z cyklem długości 3.

Łącznie widać, że, aby znaleźć wszystkie wyróżnione, z dowolnej z wymienionych przyczyn, krawędzie, wystarczy rozważyć ten sam kompleks symplicjalny, który rozważałoby się dla sprawdzenia nieseparowalności sympleksami wymiaru 2. Teraz dla każdej krawędzi e zdefiniujemy ten interesujący nas kompleks $\mathcal{R}_e$. Dla krawędzi wewnętrznej e kompleks $\mathcal{R}_e$ powstaje jako podkompleks $\mathcal{T}$ rozpięty przez wszystkie łamane długości 2 łączące końce krawędzi e (tj. najmniejszy pełny podkompleks $\mathcal{T}$ zawierający wszystkie te łamane). Dla krawędzi e zewnętrznej kompleks $\mathcal{R}_e$ powstaje analogicznie do przypadku krawędzi wewnętrznych, ale ignoruje się krawędzie powstałe we wcześniejszych etapach, niż e – $\mathcal{R}_e$ powstaje jako podkompleks $\mathcal{T}$ rozpięty przez wszystkie łamane długości 2 łączące końce krawędzi e, złożone z krawędzi powstałych w etapach nie wcześniejszych, niż e. Dla krawędzi e określamy graf $\mathcal{G}_e$ jako podgraf 1-szkieletu $\mathcal{R}_e^{(1)}$ rozpięty na wierzchołkach $\mathcal{R}_e$ nie będących końcami krawędzi e, czyli na środkach łamanych rozważanych przy definiowaniu kompleksu $\mathcal{R}_e$. W celu stwierdzenia braku pustych K_4 sprawdzamy warunek ($\mathfrak{f}1$): dla każdej krawędzi e' grafu $\mathcal{G}_e$ symplicjalny join e z e' jest 3-sympleksem w $\mathcal{R}_e$. W celu stwierdzenia braku K_5 sprawdzamy warunek ($\mathfrak{f}2$): nie ma cyklu długości 3 w grafie $\mathcal{G}_e$. Poniżej dokonujemy sugerowanego sprawdzenia, dzieląc je na przypadki w zależności od tego, dla jakiego i krawędź e jest (ei)-krawędzią. Naszym celem jest na tyle dokładny opis kompleksu $\mathcal{R}_e$ (i czasem $\mathcal{G}_e$) tak, by sprawdzenie warunków ($\mathfrak{f}1$), ($\mathfrak{f}2$) oraz odpowiedniego z warunków ($\mathfrak{n}1$), ($\mathfrak{n}2$) pozostawić jako proste ćwiczenie dla czytelnika.

(e1) Są 3 przypadki. Gdy e jest **osią** kompleks $\mathcal{R}_e$ jest kompleksem powstałym w etapie **(e1)**. Gdy e jest **krawędzią południka**, kompleks $\mathcal{R}_e$ składa się z dwóch **(e2)**-ścieżek, których środkowe wierzchołki są połączone **(e3)**-krawędzią, oraz trzech **(e1)**-ścieżek, a więc wewnętrznych. Graf $\mathcal{G}_e$ jest cyklem długości 5. Przypadek, gdy e jest **krawędzią równika**, pojawia się na Rysunku 5.5. Ścieżka złożona z **(e4)**-krawędzi jest zewnętrzna i co najwyżej jedna z ścieżek złożonych z **(e2)**-krawędzi jest zewnętrzna, ale środkowe wierzchołki obu ścieżek złożonych z **(e2)**-krawędzi sąsiadują z środkowym wierzchołkiem ścieżki złożonej z (e4)-krawędzi. Reszta warunków wynika wprost z Rysunku 5.5.

- (e2) Są 3 przypadki. Gdy e dotyka pewnego **bieguna** lub dotyka **równika** i jest zewnętrzna, to kompleks $\mathcal{R}_e$ składa się wyłącznie z dwóch sąsiednich, odpowiednio, **(e3)**-2-sympleksów lub **(e3)**-2-sympleksu i (e4)-2-sympleksu. Gdy e dotyka **równika** i jest krawędzią wewnętrzną zob. Rysunek 5.5.
- **(e3)** Są 2 przypadki, a kompleks $\mathcal{R}_e$ jest pusty albo składa się z **(e5)**-2-sympleksu zawierającego krawędź e.
- (e4) Gdy e jest (e4)-krawędzią o końcach poza **równikiem**, mamy 3 przypadki, kompleks $\mathcal{R}_e$ jest pusty lub składa się z pojedynczego **(e6)**-2-sympleksu lub dwóch **(e6)**-2-sympleksów. Gdy e jest (e4)-krawędzią mającą 1 z końców na **równiku**, mamy 2 przypadki, kompleks $\mathcal{R}_e$ w każdym z nich składa się z pojedynczego **(e6)**-2-sympleksu.
- **(e5)** Wszystkie **(e5)**-krawędzie są zewnętrzne i nie istnieje 2-sympleks w $\mathcal{T}$, którego krawędzie są wyłącznie **(e5)**- lub **(e6)**-krawędziami, zatem kompleks $\mathcal{R}_e$ jest pusty.
- **(e6)** Jak wyżej, kompleks $\mathcal{R}_e$ jest pusty.

Nieseparowalność kompleksami wymiaru 3. Dowód tej części korzysta z poniższej obserwacji służącej upraszczaniu kompleksu separującego, by zredukować problem nieseparowalności kompleksami wymiaru 3 do udowodnionej nieseparowalności kompleksami wymiaru 2.

Fakt 5.15. *Niech σ będzie 3-sympleksem w $\mathcal{T}$, a Δ jego ścianą. Zdefiniujmy przestrzeń $\mathfrak{t}(\sigma,\Delta) := (\sigma \cap \partial\mathcal{T}) \setminus \Delta$. Załóżmy, że przestrzeń $\overline{\mathfrak{t}(\sigma,\Delta)} \cap \Delta$ jest pusta lub spójna. Wówczas:*

(i) jeżeli 3-sympleks σ rozspaja brzeg $\partial\mathcal{T}$, to 2-sympleks Δ rozspaja brzeg $\partial\mathcal{T}$,

(ii) jeżeli σ' jest 3-sympleksem takim, że kompleks $\sigma\cup\sigma'$ jest pełnym podkompleksem $\mathcal{T}$ będącym zawieszeniem ściany Δ oraz kompleks $\sigma\cup\sigma'$ rozspaja brzeg $\partial\mathcal{T}$, to 3-sympleks σ' rozspaja brzeg $\partial\mathcal{T}$.

Dowód. Zanim przejdziemy do właściwego dowodu, zauważmy, że chcemy pozbyć się ze zbioru separującego zbioru $\mathfrak{t}(\sigma,\Delta)$, dokonujemy tego spychając go na $\overline{\mathfrak{t}(\sigma,\Delta)} \cap \Delta$. Jeżeli zbiór $\overline{\mathfrak{t}(\sigma,\Delta)}\cap\Delta$ jest pusty, to zbiór $\mathfrak{t}(\sigma,\Delta)$ składa się z jednego wierzchołka i teza jest oczywista. W przeciwnym przypadku mamy, że kompleks $\overline{\mathfrak{t}(\sigma,\Delta)}$ jest symplicjalnym stożkiem nad kompleksem $\overline{\mathfrak{t}(\sigma,\Delta)}\cap\Delta$, co ze spójności tego ostatniego pokazuje, że istnieje retrakcja deformacyjna z przestrzeni $\overline{\mathfrak{t}(\sigma,\Delta)}$ na jej podprzestrzeń $\overline{\mathfrak{t}(\sigma,\Delta)} \cap \Delta$. To daje retrakcję deformacyjną przestrzeni $\partial\mathcal{T} \setminus \Delta$ na podprzestrzeń $\partial\mathcal{T} \setminus \sigma$, a w przypadku (ii) dodatkowo retrakcję deformacyjną przestrzeni $\partial\mathcal{T} \setminus \sigma$ na podprzestrzeń $\partial\mathcal{T} \setminus (\sigma \cup \sigma')$. □

Strategia dowodu nieseparowalności kompleksami wymiaru 3 polega na wskazaniu każdemu 3-sympleksowi σ pewnej jego dwuwymiarowej ściany Δ_σ, a następnie każdemu 2-sympleksowi wewnętrznemu Δ pewnego zawierającego go 3-sympleksu σ_Δ tak, by pary (σ,Δ_σ) i (σ_Δ,Δ) spełniały założenia Faktu 5.15. Wówczas dowód nieseparowalności kompleksami wymiaru 3 przebiega w następujący sposób. Jeżeli σ jest 3-sympleksem kompleksu $\mathcal{T}$ rozspajającym brzeg $\partial\mathcal{T}$, to z Faktu 5.15(i) wynika, że, zdefiniowana powyżej, jego dwuwymiarowa ściana Δ_σ rozspaja brzeg $\partial\mathcal{T}$, a to wykluczyliśmy w poprzedniej części dowodu. Jeżeli τ jest podkompleksem $\mathcal{T}$ będącym zawieszeniem 2-sympleksu Δ, który rozspaja brzeg $\partial\mathcal{T}$, to 3-sympleks σ_Δ jest jednym z sympleksów kompleksu τ, oznaczmy przez σ' drugi z 3-sympleksów kompleksu τ. Wówczas z Faktu 5.15(ii) wynika, że 3-sympleks σ' rozspaja brzeg $\partial\mathcal{T}$, a to powyżej wykluczyliśmy. Poniżej wskazujemy pewne pary (σ, Δ) oraz odpowiadające im przestrzenie $\mathfrak{t}(\sigma, \Delta)$. Te pary mają być parami wymaganymi w opisie na początku tego paragrafu. Wskazywanie par (σ, Δ) w poniższym opisie przebiega w kolejności etapu konstrukcji, w którym powstał sympleks σ. Jako proste ćwiczenie dla czytelnika pozostawiamy sprawdzenie, że wskazane pary spełniają założenia Faktu 5.15 oraz zweryfikowanie, że istotnie wszystkim ścianom wewnętrznym została wskazana para. Polecamy patrzeć na Rysunek 5.3.

(e1) Ślad dowolnego **(e1)**-3-sympleksu σ na brzegu $\partial\mathcal{T}$ to 4 (izolowane) punkty, w szczególności $\mathfrak{t}(\sigma, \Delta)$ to 1 punkt dla dowolnej **(e1)**-ściany Δ **(e1)**-sympleksu σ.

(e2) Do dowolnego (e2)-3-sympleksu σ i (e2)-ściany Δ, wzdłuż której przylega do **(e4)**-3-sympleksu mamy, że $\mathfrak{t}(\sigma, \Delta)$ jest pojedynczą krawędzią.

(e3) Rozważmy dowolny **(e3)**-3-sympleks σ. Dla jego **(e3)**-ściany Δ dotykającej **równika** mamy, że $\mathfrak{t}(\sigma, \Delta)$ jest pojedynczą ścianą. Rozważmy teraz dowolną (e2)-ścianę Δ', wzdłuż której **(e3)**-3-sympleks σ graniczy z pewnym (e2)-3-sympleksem. Jeżeli σ ma dwie ściany zewnętrzne, $\mathfrak{t}(\sigma, \Delta')$ to dwie sąsiednie ściany. Jeżeli σ ma jedną ścianę zewnętrzną, $\mathfrak{t}(\sigma, \Delta')$ to pojedyncza ściana.

(e4) Niech σ będzie dowolnym (e4)-3-sympleksem, a Δ jego (e4)-ścianą, wzdłuż której przylega do innego (e4)-3-sympleksu. Mamy 3 przypadki położenia sympleksu σ w kompleksie $\mathcal{T}$, otrzymujemy że $\mathfrak{t}(\sigma, \Delta)$ jest albo pojedynczą krawędzią, albo pojedynczą ścianą, albo dwiema sąsiednimi ścianami.

(e5) Niech σ będzie **(e5)**-3-sympleksem, a Δ jego **(e3)**-ścianą, wzdłuż której graniczy z pewnym **(e3)**-3-sympleksem. Wówczas $\mathfrak{t}(\sigma, \Delta)$ jest pojedynczą ścianą.

(e6) Dla dowolnego **(e6)**-3-sympleksu σ i jego ściany Δ, która jest wewnętrzna, mamy że $\mathfrak{t}(\sigma, \Delta)$ to dwie sąsiednie ściany.

Flagowość. Rozważmy graf pełny o n wierzchołkach zawarty w 1-szkielecie $\mathcal{T}^{(1)}$, który nie rozpina sympleksu. Na mocy sprawdzonych warunków, $n \geqslant 5$. Zatem w 1-szkielecie $\mathcal{T}^{(1)}$ znajduje się graf K_5, co również wykluczyliśmy. □

Uwaga 5.16. Konstrukcja triangulacji $\mathcal{T}$ w istocie, poprzez niewielką jej modyfikację, dostarcza nieskończonej rodziny triangulacji dysku D^3 zadających prostokątne grupy Coxetera o brzegu homeomorficznym z krzywą Mengera. Ustalmy $n \geqslant 2$. W etapie **(e1)** bierzemy join cyklu długości $4n$ z krawędzią, etapy (e2)–(e4) pozostawiamy bez zmian, a etapy **(e5)** i **(e6)** przeprowadzamy tak, by wzór przypominający W^{M}, pojawiający się wokół **równika**, został powtórzony n-krotnie (dla $n = 2$ otrzymamy triangulację $\mathcal{T}$). Dowód poszczególnych własności przebiega niemalże bez zmian i nie będziemy go opisywać. Na przykład fragment o nieseparowalności korzysta z tego, że **równik** jest długości większej niż 4, i z postaci pewnych małych fragmentów rozważanej triangulacji, które to nie zależą od n.

Bibliografia

[1] R. D. Anderson, *A characterisation of the universal curve and a proof of its homogeneity*, Annals of Mathematics, 67 (1958), pp. 313–324.

[2] R. D. Anderson, *One-dimensional continuous curves and a homogeneity theorem*, Annals of Mathematics, 68 (1958), pp. 1–16.

[3] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.

[4] S. Claytor, *Topological immersion of peanian continua in the spherical surface*, Annals of Mathematics, 35 (1934), pp. 809–835.

[5] P. Dani, M. Haulmark, and G. Walsh, *Right-angled Coxeter groups with non-planar boundary*, 2019.

[6] M. Davis, *The geometry and topology of Coxeter groups*, London Mathematical Society Monograph Series, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.

[7] M. Davis and T. Januszkiewicz, *Hyperbolization of polyhedra*, Journal of Differential Geometry, 34 (1991), pp. 347–388.

[8] A. N. Dranishnikov, *Boundaries of Coxeter groups and simplicial complexes with given links*, Journal of Pure Applied Algebra, 137 (1999), pp. 139–151.

[9] C. Druţu and M. Kapovich, *Geometric group theory*, American Mathematical Society colloquium publications, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018.

[10] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, 2001.

[11] M. Haulmark, G. C. Hruska, and B. Sathaye, *Nonhyperbolic Coxeter groups with Menger boundary*, arXiv:1812.04649v3 (2019).

[12] M. Kapovich and B. Kleiner, *Hyperbolic groups with low-dimensional boundary*, Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 33 (2000), pp. 647–669.

[13] E. E. Moise, *Remarks on the Claytor embedding theorem*, Duke Mathematical Journal, 19 (1952), pp. 199–202.

[14] J. Świątkowski, *Hyperbolic Coxeter groups with Sierpiński carpet boundary*, Bulletin of the London Mathematical Society, 48 (2016), pp. 708–716.

[15] J. Świątkowski, *Reflection trees of graphs as boundaries of Coxeter groups*, arXiv:1905.07602v1 (2019).