ZADANIA Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ 1
LISTA 3. Pomocnicze fakty algebraiczne.

Produkty wolne i prezentacje

1. Pokaż, że produkt wolny $G * H$ nietrywialnych grup G i H ma trywialne centrum, i że zawiera elementy nieskończonego rzędu.
2. Uzasadnij, że
   (a) $\langle S_1|R_1\rangle * \langle S_2|R_2\rangle = \langle S_1 \sqcup S_2|R_1 \sqcup R_2\rangle$;
   (b) $\langle S_1|R_1\rangle \oplus \langle S_2|R_2\rangle = \langle S_1 \sqcup S_2|R_1 \sqcup R_2 \cup \{[s_1, s_2] : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}\rangle$.
   Uogólnij te obserwacje na produkt wolny i produkt prosty dowolnej liczby czynników. Wywnioskuj, że grupa Z^n ma prezentację $\langle s_1, \ldots, s_n|[s_i, s_j] : 1 \leq i < j \leq n\rangle$.
3. Wykaż, że grupa cykliczna Z_n ma prezentację $\langle a|a^n\rangle$, zaś grupa permutacji S_3 ma prezentację $\langle a, b|a^2, b^2, (ab)^3\rangle$.
4. Niech $G = \langle S|R\rangle$ i niech ρ będzie elementem grupy G wyrażonym za pomocą generatorów z S, i niech N będzie dzielnikiem normalnym grupy G generowanym przez element ρ. Uzasadnij, że $G/N \cong \langle S|R \cup \{\rho\}\rangle$.

Komutant i abelianizacja

Przypomnijmy, że dla dwóch elementów a, b grupy G ich *komutatorem* nazywamy element $aba^{-1}b^{-1}$ (ozn. $[a, b]$). *Komutant* grupy G to podgrupa generowana przez wszystkie komutatory, czyli podgrupa $[G, G] = \{[a, b] : a, b \in G\}$.

5. Pokaż, że komutant dowolnej grupy jest jej dzielnikiem normalnym. Wskazówka: najpierw pokaż że sprzeżenie dowolnego komutatora jest komutatorem (innych elementów).
6. Uzasadnij, że grupa ilorazowa $G/[G, G]$ jest abelowa. Ogólniej, jeśli $[G, G] < N \triangleleft G$ to G/N jest abelowa.

Grupę $G/[G, G]$ nazywamy *abelianizacją* grupy G, i oznaczamy też przez G^{ab} lub $\mathrm{Ab}(G)$.

7. Wykaż, że abelianizacja grupy wolnej F_S jest izomorficzna z grupą Z^S, czyli sumą prostą $|S|$ kopii grupy Z (lub jeszcze inaczej, grupą wszystkich funkcji $S \to Z$ o skończonym nośniku, z mnożeniem punktowym). Wskazówka: rozważ naturalny homomorfizm $F_S \to Z^S$ i udowodnij, że jego jądro pokrywa się z komutantem grupy F_S.
8. Uzasadnij, że $\mathrm{Ab}(G * H) = \mathrm{Ab}(G) \times \mathrm{Ab}(H)$, oraz ogólniej $\mathrm{Ab}(*_\alpha G_\alpha) = \oplus_\alpha \mathrm{Ab}(G_\alpha)$.
9. Uzasadnij, że abelianizacja grupy o prezentacji $\langle S|R\rangle$ to grupa o prezentacji

$$\langle S|R \cup \{[s, s'] : s, s' \in S\}\rangle.$$