ZADANIA Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ 1

LISTA 6. Klasyfikacje nakryć, reprezentacje permutacyjne, nakrycia normalne, działania nakrywające.

1. Znajdź wszystkie spójne nakrycia przestrzeni $(S^1 \times S^1) \cup (D^2 \times \{s_0\})$.
2. Niech a i b będą generatorami grupy $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ odpowiadającymi poszczególnym S^1-skadnikom bukietu.
   (1) Niech Θ_4 będzie grafem o dwóch wierzchołkach, i o czterech krawędziach, z których każda łączy oba te wierzchołki. Opisz odwzorowanie nakrycia $p : \Theta_4 \to S^1 \vee S^1$ i uzasdanij, że pogrupa w grupie wolnej $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_{a,b}$ odpowiadająca temu nakryciu to podgrupa Q składająca się z wszystkich elementów reprezentowanych słowami nad alfabetem a, b, a^{-1}, b^{-1} o parzystej długości.
   (2) Znajdź nakrycie bukietu $S^1 \vee S^1$ odpowiadające podgrupie normalnej generowanej przez elementy a^2, b^2 i (ab^4), wraz z uzasadnieniem.
3. Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie spójnym, lokalnie drogowo spójnym i półlokalnie jedospójnym nakryciem, i niech ρ będzie reprezentacją permutacyjną tego nakrycia, jako działaniem grupy podstawowej $\pi(X, x_0)$ przez permutacje na włóknie $p^{-1}(x_0)$.
   (1) Pokaż, że komponenty spójności nakrycia $\widetilde{X}$ odpowiadają orbitom działania grupy $\pi_1(X, x_0)$ na $p^{-1}(x_0)$. W szczególności, $\widetilde{X}$ jest spójne dokładnie wtedy gdy działanie $\pi_1(X, x_0)$ na $p^{-1}(x_0)$ jest tranzytywne.
   (2) Niech $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, i niech $\widetilde{X}_0$ będzie komponentą $\widetilde{X}$ zawierającą $\tilde{x}_0$. Uzasadnij, że $p|_{\widetilde{X}_0} : (\widetilde{X}_0, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ jest nakryciem. Pokaż, że podgrupa w $\pi_1(X, x_0)$ odpowiadająca temu nakryciu pokrywa się ze *stabilizatorem* $\tilde{x}_0$, tzn. z podgrupą złożoną z tych wszystkich elementów $g \in \pi_1(X, x_0)$, dla których $\rho(g)(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$.
4. Znajdź wszystkie spójne 2-krotne i 3-krotne nakrycia bukietu $S^1 \vee S^1$ z dokładnością do izomorfizmu nakryć bez punktów bazowych, a także z dokładnością do izomorfizmu z punktem bazowym. Zrób to dwoma sposonami: (1) ręcznym elementarnym sposobem ad hoc, (2) korzystając z permutacyjnych reprezentacji nakryć o ustalonej krotności.
5. Przypomnijmy, że płaszczyzna rzutowa RP^2 ma grupę podstawową dwuelementową, $\pi_1 RP^2 = Z_2$, i że jej spójnym dwukrotnym nakryciem jest sfera S^2. Znajdź wszystkie spójne nakrycia bukietu $RP^2 \vee RP^2$ dwóch płaszczyzn rzutowych. Które spośród tych nakryć nie są normalne?
6. Skonstruuj nienormalne (nieregularne) nakrycia butelki Kleina torusem oraz butelki Kleina butelką Kleina.
7. Niech X będzie spójną, lokalnie drogowo spójną i półlokalnie jednospójną przestrzenią. Powiemy, że spójne nakrycie $\widetilde{X} \to X$ jest *abelowe*, jeśli jest normalne i ma abelową grupę deck-transformacji. Uzasadnij, że X posiada takie abelowe nakrycie, które jest nakryciem każdego innego abelowego nakrycia X, i że nakrycie o takiej własności jest jednoznaczne z dokładnością do izomorfizmu. Będziemy je nazywać *uniwersalnym abelowym nakryciem.* Opisz abelowe uniwersalne nakrycia bukietów $S^1 \vee S^1$ oraz $S^1 \vee S^1 \vee S^1$. Opisz też wszystkie abelowe nakrycia bukietu płaszczyzn rzutowych $RP^2 \vee RP^2$, w tym abelowe nakrycie uniwersalne.

8. Mając dane nakrywające działania grupy G_1 na przestrzeni X_1 oraz grupy G_2 na przestrzeni X_2, rozważmy działanie $G_1 \times G_2$ na $X_1 \times X_2$ zdefiniowane przez

$$(g_1, g_2)(x_1, x_2) := (g_1(x_1), g_2(x_2)).$$

Uzasadnij, że jest to także działanie nakrywające. Pokaż, że iloraz $(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2)$ jest homeomorficzny z produktem ilorazów $(X_1/G_1) \times (X_2/G_2)$.

9. Mając dane nakrywające działanie grupy G na spójnej lokalnie drogowo spójnej przestrzeni X, każda podgrupa $H < G$ wyznacza nakrycia $X \to X/H$ oraz $X/H \to X/G$. Uzasadnij, że
   (a) każde spójne nakrycie pośrednie pomiędzy X i X/G jest izomorficzne (jako nakrycie X/G) z $X/H \to X/G$, dla pewnej podghrupy $H < G$;
   (b) dwa nakrycia X/H_1 i X/H_2 jak wyżej są izomorficzne dokładnie wtedy gdy podgrupy H_i są sprzężone w G;
   (c) nakrycie $X/H \to X/G$ jest normalne dokładnie wtedy gdy H jest normalną podgrupą w G, a grupą deck-transformacji tego nakrycia jest wtedy grupa ilorazowa G/H.

10. Dane jest nakrycie $p : \widetilde{X} \to X$ spójnej lokalnie drogowo spójnej półlokalnie jednospójnej przestrzeni X, z reprezentacją permutacyjną $\rho_p : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Sym}[p^{-1}(x_0)]$. Niech $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ będzie odwzorowaniem ciągłym określonym na spójnej lokalnie drogowo spójnej półlokalnie jednospójnej przestrzeni Y.
   (1) Uzasadnij, że włókno $[f^*(p)]^{-1}(y_0)$ cofniętego nakrycia $f^*(p) : f^*(\widetilde{X}) \to Y$ ma naturalne utożsamienie z włóknem $p^{-1}(x_0)$.
   (2) Opisz reprezentację prezentacyjną $\rho_{f^*(p)} : \pi_1(Y, y_0) \to \mathrm{Sym}[f^*(p)^{-1}(y_0)]$ cofniętego nakrycia $f^*(p) : f^*(\widetilde{X}) \to Y$, w terminach reprezentacji ρ_p, korzystając z utożsamienia włókien z punktu (1).