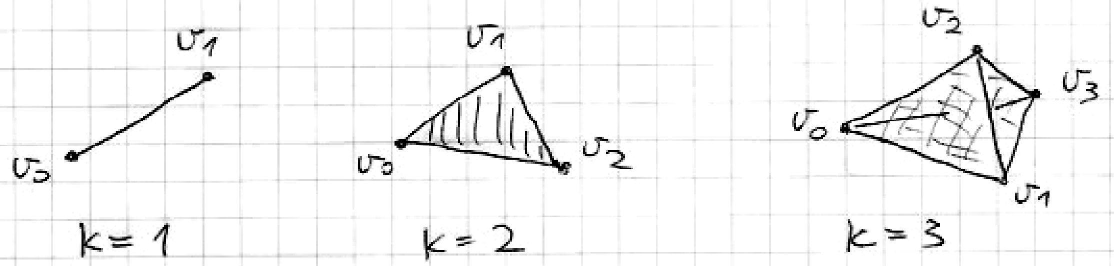
HOMOLOGIE SINGULARNE

Def. Układ $k+1$ punktów $v_0, v_1, \dots, v_k$ w $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$, jest afinicznie niezależny jeśli nie zawiera się w żadnej $(k-1)$-wymiarowej podprzestrzeni afinicznej.

($\Longleftrightarrow$ układ wektorów $v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ jest liniowo niezależny)

Sympleks rozpięty przez taki układ, ozn. $[v_0, \dots, v_k]$, to zbiór $\left\{ \sum_{i=0}^{k} t_k v_k : \sum_{i=0}^{k} t_k = 1, \ t_i \geq 0 \right\}$

(zbiór kombinacji wypukłych punktów $v_0, \dots, v_k$ albo otoczka wypukła zbioru $\{v_0, \dots, v_k\}$)



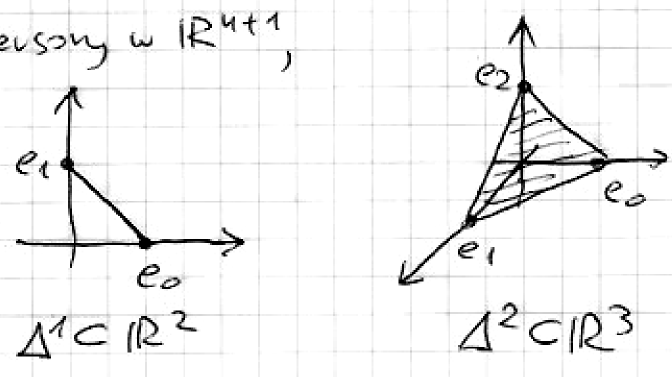
Wymiar takiego sympleksu to k,

k = wymiar najmniejszej afinicznej podprzestrzeni w $\mathbb{R}^n$ zawierającej ten sympleks. Sympleks k-wymiarowy krótko nazywamy k-sympleksem.

Ściany sympleksu $[v_0, \dots, v_k]$ to sympleksy rozpięte przez podzbiory zbioru $v_0, \dots, v_k$.

Standardowy n-sympleks $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ to $\Delta^n = [e_0, \dots, e_n]$ gdzie $e_0, \dots, e_n$ to wersory w $\mathbb{R}^{n+1}$,

$e_0 = (1, 0, \dots, 0)$
$e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$
$\vdots$
$e_n = (0, \dots, 0, 1)$



X - dowolna przestrzeń topologiczna

(1+)

Def. Singularny n-sympleks w p. top. X to odwzorowanie ciągłe $\sigma : \Delta^n \to X$.

((n-1)-wymiarowe

Ściany) singularnego n-sympleksu $\sigma : \Delta^n \to X$

(mają też być odwzorowaniami):

dla $i = 0, 1, \ldots, n$ oznaczmy przez

$$\sigma|[e_0, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_n] : \Delta^{n-1} \to X$$

złożenie $\Delta^{n-1} \xrightarrow{\lambda_i} \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X$

gdzie $\lambda_i(t_0, \ldots, t_{n-1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_n)$

tzn. λ_i jest afinicznym odwzorowaniem takim, że

$$\lambda_i(e_k) = \begin{cases} e_k & \text{dla } k < i \\ e_{k+1} & \text{dla } k \geq i \end{cases}$$

Singularne n-łańcuchy w X

to elementy grupy abelowej

$$C_n X := \bigoplus_{\sigma} \{ \mathbb{Z}_{[\sigma]} : \sigma \text{ jest singularnym } n\text{-sympleksem w } X \}$$

[formalne skończone kombinacje postaci $\sum n_i \sigma_i$

ze współczynnikami $n_i \in \mathbb{Z}$

gdzie działanie grupowe (suma) jest zadane przez

$$\left(\sum_i n_i \sigma_i\right) + \left(\sum_i m_i \sigma_i\right) = \sum_i (n_i + m_i) \sigma_i \Big]$$

Homomorfizmy brzegowania $\partial_n : C_n X \to C_{n-1} X$:

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sigma|[e_0, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_n], \text{ i dalej}$$

dla $c = \sum n_i \sigma_i \in C_n X$, $\partial_n c = \partial_n\left(\sum n_i \sigma_i\right) := \sum n_i \partial_n \sigma_i$

KONWENCJA: $\partial_0 : C_0 X \to 0$ - homomorfizm zerowy w grupę trywialną 0.

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n X \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} X \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 X \xrightarrow{\partial_1} C_0 X \xrightarrow{\partial_0} 0$$

n-cykle singularne w X

$$Z_n X := \{c \in C_n X : \partial_n c = 0\} = \ker \partial_n$$

n-brzegi singularne w X

$$B_n X := \{c \in C_n X : \exists a \in C_{n+1} X, \partial_{n+1} a = c\} = \mathrm{im}(\partial_{n+1})$$

brzegi są cyklami

• FAKT. $\partial_n \partial_{n+1} = \partial^2 = 0$.

Dowód:
Ponieważ $(n+1)$-sympleksy singularne są generatorami w $C_{n+1} X$, wystarczy wykazać, że $\partial^2 \sigma = 0$ dla każdego $(n+1)$-sympleksu singularnego σ.

Mamy: $\partial_{n+1}(\sigma) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sigma|_{[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}]}$, a zatem

$$\partial_n \partial_{n+1}(\sigma) = \sum_{j<i} (-1)^j (-1)^i \sigma|_{[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n+1}]} +$$

$$+ \sum_{j>i} (-1)^{j-1} (-1)^i \sigma|_{[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_{n+1}]}$$

Dwie powyższe sumy wzajemnie się znoszą, wyraz po wyrazie, lub inaczej, różnią się o czynnik -1 po zamianie ról indeksów i oraz j.

Stąd $\partial_n \partial_{n+1}(\sigma) = 0$. $\square$

• Jeśli c jest brzegiem, $c = \partial a$, to
$\partial c = \partial \partial a = 0$, więc c jest cyklem,
czyli $B_n X \subset Z_n X$ (brzegi są podgrupą w grupie cykli).

homologie singularne

$$H_n X := Z_n X / B_n X = \ker \partial_n / \mathrm{im}(\partial_{n+1})$$ – grupa ilorazowa.

UWAGI. (0) Z_nX oraz B_nX są podgrupami w C_nX (zamkniętość na sumę).

2+

(1) Grupy C_nX są abelowe, więc ich podgrupy Z_nX, B_nX też. Zatem grupa ilorazowa $H_nX = Z_nX/B_nX$ też jest abelowa.

(2) Grupy C_nX są na ogół nieprzeliczalne, podobnie jak ich podgrupy Z_nX, B_nX.

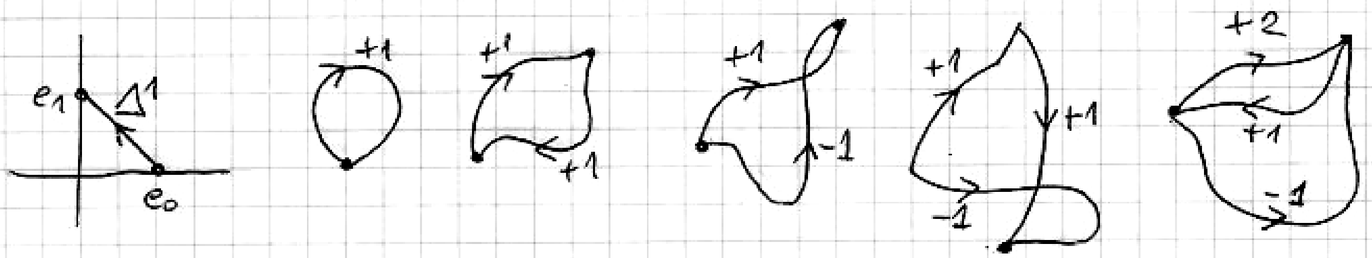
Jednak homologie $H_nX = Z_nX/B_nX$, dla „porządnych" przestrzeni (np. dla rozmaitości zwartych, skończonych kompleksów symplicjalnych, skończonych kompleksów komórkowych)

są grupami skończenie generowanymi
[na razie zupełnie nie widać dlaczego]

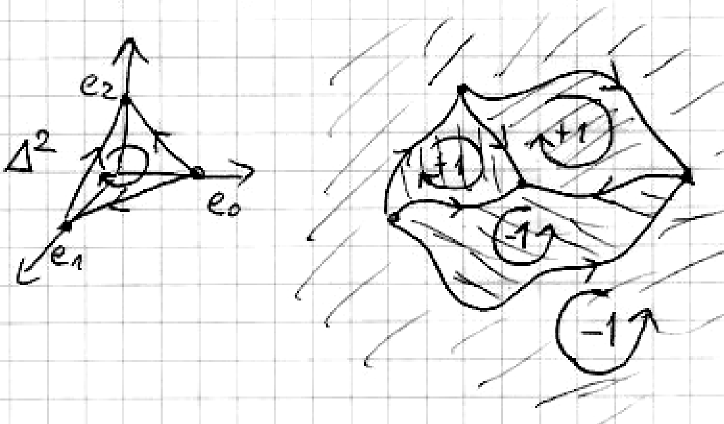
a dla $n > \dim X$ zerują się.

[Przekonamy się o tym za kilka tygodni.]

(3) Przykłady 1-cykli singularnych w przestrzeni X



(4) Przykład singularnego 2-cyklu



- 1-cykle w X pochodzą od odwzorowań w X podpodzielonych na segmenty i zorientowanych okręgów S^1 (być może kilku kopii)
- 2-cykle w X pochodzą od odwzorowań w X podrozbitych na trójkąty zamkniętych zorientowanych powierzchni (niekoniecznie spójnych)
- n-cykle w X, dla $n \geq 3$, pochodzą od odwzorowań w X zamkniętych i zorientowanych pseudo-rozmaitości

2+

(4) każdy cykl $c \in Z_n X$

wyznacza <u>indukowaną</u> klasę w homologiach $H_n X$,

oznaczaną przez $[c] \in H_n X = Z_n X / B_n X$,

mianowicie jest to warstwa $c + B_n X \in Z_n X / B_n X$.

Cykle $c_1, c_2 \in Z_n X$ wyznaczające tą samą klasę homologii (czyli takie, że $[c_1] = [c_2]$) różnią się o brzeg,

$$c_1 - c_2 = b = \partial a \quad \text{dla pewnego } a \in C_{n+1} X.$$

O takich cyklach mówi się, że są <u>homologiczne</u>.

KILKA ŁATWYCH FAKTÓW

FAKT 1. Jeśli $X = \dot{\bigcup}_\alpha X_\alpha$ jest rozkładem X na komponenty drogowej spójności, to $\forall n \geq 0$ $H_n X = \bigoplus_\alpha H_n X_\alpha$.

Dowód: Ponieważ obraz dowolnego sympleksu singularnego $\sigma : \Delta^n \to X$ jest drogowo spójny, zawiera się on w dokładnie jednym spośród X_α.

Stąd $C_n X = \bigoplus_\alpha C_n X_\alpha$.

Homomorfizm $\partial_n : C_n X \to C_{n-1} X$ przeprowadza

$C_n X_\alpha \subset C_n X$ w $C_{n-1} X_\alpha \subset C_{n-1} X$

W takim razie

$$Z_n X = \ker[C_n X \xrightarrow{\partial} C_{n-1} X] =$$

$$= \bigoplus_\alpha \ker[C_n X_\alpha \to C_{n-1} X_\alpha] = \bigoplus_\alpha Z_n X_\alpha$$

Podobnie

$$B_n X = \operatorname{im}[\partial_{n+1} : C_{n+1} X \to C_n X] = \bigoplus_\alpha \operatorname{im}[\partial_{n+1} : C_{n+1} X_\alpha \to C_n X_\alpha] =$$

$$= \bigoplus_\alpha B_n X_\alpha$$

Zatem

$$H_n X = Z_n X / B_n X = \left[\bigoplus_\alpha Z_n X_\alpha\right] \Big/ \left[\bigoplus_\alpha B_n X_\alpha\right] =$$

$$= \bigoplus_\alpha (Z_n X_\alpha / B_n X_\alpha) = \bigoplus_\alpha H_n X_\alpha . \square$$

3+

FAKT 2. Jeśli X jest drogowo spójna, to $H_0 X \cong \mathbb{Z}$.

Dowód: Ponieważ $\partial_0 : C_0 X \to 0$, więc $\ker \partial_0 = C_0 X$,

a zatem $H_0 X = \ker \partial_0 / \mathrm{im}(\partial_1) = C_0 X / \mathrm{im}(\partial_1)$.

Rozważmy pomocniczy homomorfizm $\varepsilon : C_0 X \to \mathbb{Z}$ zadany przez

$\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$. Oczywiście ε jest surjektywny gdy $X \neq \emptyset$.

Twierdzę, że gdy X jest drogowo spójna,

zachodzi $\ker(\varepsilon) = \mathrm{im}(\partial_1)$.

Z tego wynika, że $C_0 X / \mathrm{im}(\partial_1) = C_0 X / \ker(\varepsilon) = \mathbb{Z}$.

Zauważmy najpierw, że $\mathrm{im}(\partial_1) \subset \ker(\varepsilon)$ niezależnie od tego, czy X jest drogowo spójna. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego 1-sympleksu singularnego $\sigma : \Delta^1 \to X$ mamy $\partial\sigma \in \ker \varepsilon$,

czyli $\varepsilon\partial\sigma = 0$. I rzeczywiście,

$$\varepsilon\partial(\sigma) = \varepsilon(\sigma|_{[e_1]} - \sigma|_{[e_0]}) = 1 - 1 = 0.$$

Dla dowodu inkluzji $\ker(\varepsilon) \subset \mathrm{im}(\partial_1)$ skorzystamy z drogowej spójności X.

Niech $\sum_{i=1}^m n_i \sigma_i \in \ker(\varepsilon)$, czyli $\sum n_i = 0$.

Każdy σ_i jest 0-sympleksem singularnym, czyli odwzorowaniem Δ^0 (będącego pojedynczym punktem) w pewien punkt $x_i \in X$.

Rozważmy w X pewien punkt bazowy x_0, i dla każdego i rozważmy drogę w X od x_0 do x_i, ~~[illegible]~~ $\tau_i : I \to X$, traktując ją jako singularny 1-sympleks w X. Oznaczmy też przez σ_0 0-sympleks singularny w X, którego obrazem jest x_0.

Wtedy mamy $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$, a więc

$$\partial\left(\sum_{i=1}^m n_i \tau_i\right) = \sum_{i=1}^m n_i \sigma_i - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m n_i\right)}_{=0} \cdot \sigma_0 = \sum_{i=1}^m n_i \sigma_i.$$

Zatem $\sum_{i=1}^m n_i \sigma_i \in \mathrm{im}\,\partial_1$, co kończy dowód. $\square$

3

WNIOSEK (z FAKTÓW 1 i 2)

Jeśli $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ jest rozkładem na komponenty drogowej spójności,

to $H_0 X = \bigoplus_{\alpha \in A} H_0 X_\alpha$ jest sumą prostą $|A|$ kopii $\mathbb{Z}$,

$$H_0 X \cong \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{Z}[\alpha].$$

FAKT 3 Jeśli X jest przestrzenią jednopunktową, to

$$H_n X \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{gdy } n=0 \\ 0 & \text{gdy } n>0 \end{cases}.$$

Dowód:

Dla każdego $n \geq 0$ mamy $C_n X \cong \mathbb{Z}$
(bo jest tylko jeden n-sympleks singularny σ_n w X).

Ponadto,
$$\partial_n \sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \text{ nieparzyste } (\Delta^n \text{ ma parzystą liczbę ścian}) \\ \sigma_{n-1} & \text{gdy } n \text{ parzyste} \end{cases}$$

Pełen kompleks łańcuchowy

$$\dots \xrightarrow{\partial_{2n+4}} C_{2n+3}X \xrightarrow{\partial_{2n+3}} C_{2n+2}X \xrightarrow{\partial_{2n+2}} C_{2n+1}X \xrightarrow{\partial_{2n+1}} C_{2n}X \xrightarrow{\partial_{2n}} \dots \to C_3X \xrightarrow{\partial_3} C_2X \xrightarrow{\partial_2} C_1X \xrightarrow{\partial_1} C_0X \xrightarrow{\partial_0} 0$$

ma wtedy postać

$$\dots \xrightarrow[\partial_5]{} \mathbb{Z} \xrightarrow[\partial_4]{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow[\partial_3]{0} \mathbb{Z} \xrightarrow[\partial_2]{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow[\partial_1]{0} \mathbb{Z} \xrightarrow[\partial_0]{} 0$$

Widać, że $H_0 X = \ker \partial_0 / \mathrm{im}(\partial_1) \cong \mathbb{Z}$, zaś dla $n>0$

$$H_n X = \ker \partial_n / \mathrm{im}(\partial_{n+1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 0/0 = 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

$\square$

Homomorfizm indukowany i homeomorficzna niezmienniczość oraz funktorialność homologii singularnych.

Niech $f: X \to Y$ ciągłe.

Indukuje ono homomorfizm $f_\#: C_n X \to C_n Y$ $(\forall n \geq 0)$

zadany przez • $f_\#(\sigma) = f \circ \sigma$ $\left[\begin{tikzcd} \Delta^n \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend right, "f_\#(\sigma)"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \right]$

• $f_\#\left(\sum n_i \sigma_i\right) := \sum n_i f_\#(\sigma_i)$.

WŁASNOŚCI HOMOMORFIZMU $f_\#$:

(A) Zachodzi „komutowanie" $f_\# \partial = \partial f_\#$

czyli komutowanie diagramu

$$\begin{tikzcd} C_n X \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_\#"'] & C_{n-1} X \arrow[d, "f_\#"] \\ C_n Y \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1} Y \end{tikzcd}$$

Uzasadnienie:

Wystarczy pokazać, że dla dowolnego n-sympleksu singularnego σ w X zachodzi $f_\# \partial_n(\sigma) = \partial_n f_\#(\sigma)$. Mamy

$$f_\# \partial_n(\sigma) = f_\#\left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma|_{[e_0,\dots,\hat{e}_j,\dots,e_n]}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j f_\#\left(\sigma|_{[e_0,\dots,\hat{e}_j,\dots,e_n]}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j f \circ \left(\sigma|_{[e_0,\dots,\hat{e}_j,\dots,e_n]}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (f \circ \sigma)|_{[e_0,\dots,\hat{e}_j,\dots,e_n]} =$$

$$= \partial_n(f \circ \sigma) = \partial_n(f_\#(\sigma)). \quad \square$$

4+

(B) $f_\#(Z_nX) \subset Z_nY$, bo

$$\partial f_\#(c) = f_\#(\partial c) = f_\#(0) = 0 \quad \forall c \in Z_n.$$

(C) $f_\#(B_nX) \subset B_nY$, bo

jeśli $c \in B_nX$, $c = \partial a$, to

$$f_\#(c) = f_\#(\partial a) = \partial f_\#(a) \in B_nY.$$

(D) Zatem $f_\#$ indukuje homomorfizm ilorazów $\underset{H_nX}{\underset{\shortparallel}{Z_nX/B_nX}} \to \underset{H_nY}{\underset{\shortparallel}{Z_nY/B_nY}}$,

$f_*: H_nX \to H_nY$, zadany przez formułę

$$f_*([c]) = [f_\#(c)]$$

dla dowolnego $c \in Z_nX$.

UWAGA: homologiczne cykle w X przeprowadzane są przez $f_\#$ na homologiczne cykle w Y, stąd indukowanie odwzorowanie na homologiach.

WŁASNOŚCI f_*:

(1) dla $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ zachodzi $g_* f_* = (gf)_*$

$$\begin{tikzcd} H_nX \arrow[r, "f_*"] \arrow[rr, bend right, "(gf)_*"'] & H_nY \arrow[r, "g_*"] & H_nZ \end{tikzcd}$$

(2) $(id_X)_* = id_{H_*X}$

Uzasadnienie własności (1):

Zauważmy najpierw, że w dość oczywisty sposób zachodzi $g_\# f_\# = (gf)_\#$ (wynika to z tego, że $g \circ (f \circ \sigma) = (gf) \circ \sigma$). Wówczas mamy:

$$(gf)_*([c]) = [(gf)_\#(c)] = [g_\# f_\#(c)] = g_*([f_\#(c)]) =$$
$$= g_*(f_*([c])) = g_* f_*([c]). \quad \square$$

Własność (2) jest oczywista.

WNIOSEK (z własności (1) i (2))

Homologie singularne H_n wraz z odwzorowaniami indukowanymi wyznaczają funktor

$$[\mathrm{TOP}, \text{homeo}] \longrightarrow [\mathrm{Ab}, \text{homomorfizmy}]$$

TOP — przestrzenie topologiczne; Ab — grupy abelowe

WAŻNA OBSERWACJA

Homologie są niezmiennikami homeomorfizmu, tzn. jeśli przestrzenie X, Y są homeomorficzne, to dla dowolnego $n \geq 0$ grupy H_nX, H_nY są izomorficzne.

Dowód: Homeomorfizm $h: X \to Y$ zadaje homomorfizmy $h_*: H_nX \to H_nY$ oraz $(h^{-1})_*: H_nY \to H_nX$.

Ponadto zachodzą związki:

$$h_*(h^{-1})_* = (hh^{-1})_* = (id_Y)_* = id_{H_nY} \quad \text{oraz}$$

$$(h^{-1})_* h_* = (h^{-1}h)_* = (id_X)_* = id_{H_nX}.$$

Zatem h_* jest odwracalny, bo $(h_*)^{-1} = (h^{-1})_*$, czyli $h_*: H_nX \to H_nY$ jest izomorfizmem, więc grupy H_nX, H_nY są izomorficzne. $\square$

Pierwsze nietrywialne fakty:

TWIERDZENIE. Dla homotopijnych odwzorowań ciągłych $f, g : X \to Y$ mamy $f_* = g_*$ [jako homomorfizmy $H_* X \to H_* Y$].

WNIOSEK. Homologie singularne homotopijnie równoważnych przestrzeni są izomorficzne.

UDOWODNIMY WNIOSEK, A POTEM TWIERDZENIE

DEFINICJA:

(1) $f, g : X \to Y$ homotopijne, jeśli istnieje ciągłe $F : X \times [0,1] \to Y$ takie że $\forall x \in X$ $F(x,0) = f(x)$ oraz $F(x,1) = g(x)$.

(2) Przestrzenie topologiczne X, Y są homotopijnie równoważne jeśli istnieją odwzorowania $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ t.że

$$[f \circ g : Y \to Y] \sim id_Y, \quad [g \circ f : X \to X] \sim id_X .$$

WŁASNOŚCI: (1) relacja równoważności słabsze (istotnie!) niż homeomorficzność.

(2) Jeśli $Y \subset X$ jest deformacyjnym retraktem, to $X \overset{h.e.}{\cong} Y$.
[$f : Y \to X$ - inkluzja, $g : X \to Y$ - retrakcja]

(3) Przestrzeń X jest ściągalna jeśli id_X jest homotopijne z odwzorowaniem stałym w punkt $x_0 \in X$.
Ściągalna przestrzeń X jest h.e. z punktem.

DOWÓD WNIOSKU (NA PODST. TWIERDZENIA):

Skoro $f \circ g \sim id_Y$ to $f_* \circ g_* = (fg)_* = (id_Y)_* = id_{H_* Y}$

$g \circ f \sim id_X$ to $g_* \circ f_* = \ldots\ldots\ldots = id_{H_* X}$

Zatem $g_* = (f_*)^{-1}$ i obie są izomorfizmami. $\square$

DALSZE KONSEKWENCJE np. $X = B^n$ - kula w $\mathbb{R}^n$

Jeśli X ściągalny, to $H_n X = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$. $\square$

OPERATOR PRYZMY (GRANIASTOSŁUPA) $P: C_nX \to C_{n+1}(X\times I)$

$I=[0,1]$, graniastosłup $\Delta^n\times I \subset \mathbb{R}^{n+1}\times \mathbb{R}$

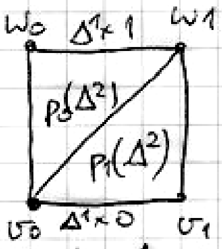
wierzchołki: $v_i := (e_i,0)$, $w_i=(e_i,1)$

Dzielimy $\Delta^n\times I$ na $n+1$ $(n+1)$-sympleksów $\quad i=0,\dots,n$

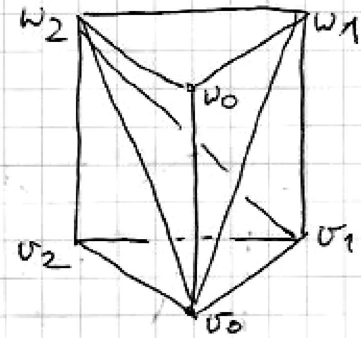
będących obrazami następujących odwzorowań $p_i : \Delta^{n+1} \to \Delta^n\times I$:

p_i afiniczne, $p_i : e_0,\dots,e_{n+1} \mapsto v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n$ odpowiednio,

tzn.
$$p_i\Big(\sum_{j=0}^{n+1} t_j e_j\Big) = \sum_{j=0}^{i} t_j v_j + \sum_{j=i+1}^{n+1} t_j w_{j-1}$$



$n=1$



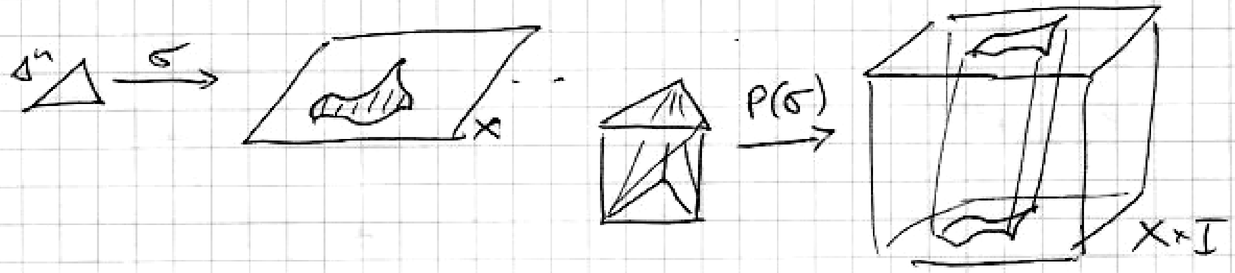
$n=2$

DEF. Dla $\sigma:\Delta^n\to X$ (singularny n-sympleks) określamy $P(\sigma)\in C_{n+1}(X\times I)$,

$$P(\sigma) := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (\sigma\times id_I)\circ p_j = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, \sigma\times id_I|_{[v_0,\dots,v_j,w_j,\dots,w_n]}$$

[gdzie $\sigma\times id_I : \Delta^n\times I \to X\times I$, $\sigma\times id_I(x,t) = (\sigma(x),t)$].

IDEA:



DEF. Dla dowolnego łańcucha $\sum_i n_i\sigma_i \in C_nX$ określamy
$$P\Big(\sum n_i\sigma_i\Big) := \sum n_i\, P(\sigma_i)$$

WŁASNOŚĆ. Znaki $(-1)^j$ są tak dobrane, że zachodzi równość

(P) $\quad \partial P(\sigma) = \sigma\times 1 - \sigma\times 0 - P(\partial\sigma)$

gdzie $\sigma\times i\,(x) = (\sigma(x), i)$, $\sigma\times i : \Delta^n \to X\times I$

[brzeg pryzmy = górna podstawa − dolna podstawa − odp. zorientowane ściany boczne]

(6+)

DOWÓD WŁASNOŚCI (P)

$$\partial P(\sigma) = \partial\left[\sum_{j=0}^{n} (-1)^j (\sigma \times id_I)\circ p_j\right] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \,\partial\left[\sigma\times id_I|_{[v_0,\dots,v_j,w_j,\dots,w_n]}\right]$$

$$= \sum_{0\le i\le j\le n} (-1)^i (-1)^j \, \sigma\times id_I|[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_j,w_j,\dots,w_n] \;+$$

$$+ \sum_{0\le j\le i\le n} (-1)^{i+1} (-1)^j \, \sigma\times id_I|_{[v_0,\dots,v_j,w_j,\dots,\hat{w}_i,\dots,w_n]}.$$

Wyrazy z $i=j$ w obu sumach kasują się, z wyjątkiem dwóch wyrazów:

- dla $i=j=0$ w pierwszej sumie zostaje wyraz
$$\sigma\times id_I|[\hat{v}_0,w_0,\dots,w_n] = \sigma\times id_I|_{[w_0,\dots,w_n]} = \sigma\times 1$$
- dla $i=j=n$ w drugiej sumie zostaje wyraz
$$-\sigma\times id_I|[v_0,\dots,v_n,\hat{w}_n] = -\sigma\times id_I|_{[v_0,\dots,v_n]} = -\sigma\times 0.$$

Wyrazy z $i\neq j$ w obu sumach dają razem dokładnie $-P(\partial\sigma)$, gdyż:

$$P(\partial\sigma) = P\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \,\sigma|_{[e_0,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_n]}\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, P\left(\sigma|_{[e_0,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_n]}\right)$$

$$= \sum_{0\le j<i\le n} (-1)^j (-1)^i \,\sigma\times id_I|_{[v_0,\dots,v_j,w_j,\dots,\hat{w}_i,\dots,w_n]} \;+$$

$$+ \sum_{0\le i<j\le n} (-1)^{j-1}(-1)^i \,\sigma\times id_I|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_j,w_j,\dots,w_n]}. \qquad \square$$

OBSERWACJA:

Własność (P) zachodzi też dla łańcuchów: dla $c = \sum n_i \sigma_i$ mamy

$$\partial P(c) = c\times 1 - c\times 0 - P(\partial c)$$

gdzie $c\times 0 = \sum n_i(\sigma_i \times 0)$, $c\times 1 = \sum n_i(\sigma_i\times 1)$

[bezpośredni rachunek wykorzystujący definicję $P(c)$, powyższe określenia $c\times 0$ i $c\times 1$, oraz to że $\partial c = \partial(\sum n_i\sigma_i) = \sum n_i(\partial\sigma_i)$].

ZŁOŻENIE OPERATORA PRYZMY P Z HOMOTOPIĄ F

$F: X\times I \to Y$ homotopia pomiędzy $f = F(\cdot, 0)$ oraz $g = F(\cdot, 1)$.

Dla łańcucha $c \in C_n X$ rozważamy $F_\# \circ P(c) \in C_{n+1} Y$

(jest to „sympliçjalizacja" homotopii pomiędzy łańcuchami $f_\#(c)$ oraz $g_\#(c)$ z $C_n Y$ zadanej przez F, czyli sympliçjalizacja czegoś w rodzaju $F_\#(c\times id_I)$)

nieformalnie $F_\#(\sigma\times id_I)$

formalnie $F_\#(P(\sigma))$

Własność (P) implikuje:

$$\partial F_\# P(c) = F_\# \partial P(c) = F_\#[c\times 1 - c\times 0 - P(\partial c)] =$$

$$= F_\#(c\times 1) - F_\#(c\times 0) - F_\# P(\partial c) = g_\#(c) - f_\#(c) - F_\# P(\partial c)$$

czyli równość na poziomie homomorfizmów $C_n X \to C_n Y$

(FP) $$\boxed{\partial F_\# P = g_\# - f_\# - F_\# P \partial}$$

Wykorzystamy tą równość (FP) do dowodu TWIERDZENIA że homotopijne $f, g: X\to Y$ indukują równe $f_*, g_*: H_n X \to H_n Y$.

7+

DOWÓD TWIERDZENIA.

Mamy $f \sim g$, $F(\cdot, 0) = f$, $F(\cdot, 1) = g$.

Niech $c \in Z_n X$ cykl, czyli $\partial c = 0$.

Ze wzoru (FP) otrzymujemy

$$\partial F_\# P(c) = g_\#(c) - f_\#(c) \quad (\text{bo } F_\# P(\partial c) = 0, \text{ gdyż } \partial c = 0).$$

Zatem cykle $f_\#(c)$ i $g_\#(c)$ różnią się o brzeg, czyli są homologiczne (indukują ten sam element w homologiach $H_n Y$, tzn. $[f_\#(c)] = [g_\#(c)]$).

W takim razie dla dowolnego cyklu $c \in Z_n X$ zachodzi

$$f_*([c]) = [f_\#(c)] = [g_\#(c)] = g_*([c])$$

a zatem f_* i g_* mają te same wartości na wszystkich klasach homologii z $H_n X$, czyli $f_* = g_*$. $\square$