ZWIĄZEK π_1 Z H_1

1. odwzorowanie $h : \pi_1(X, x_0) \to H_1 X$

niech $f : [0,1] \to X$, $f(0) = f(1) = x_0$ – pętla w X zaczepiona w x_0

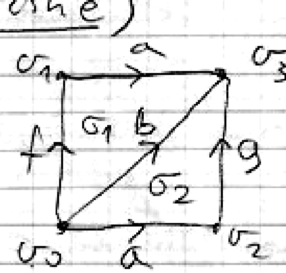
- f wyznacza $[f] = [f]_{\pi_1} \in \pi_1(X, x_0)$
- traktując f jako 1-sympleks singularny, i jako 1-łańcuch $f \in C_1 X$, mamy $\partial f = 0$, bo $\partial f = f(1) - f(0) = x_0 - x_0 = 0 \in C_0 X$; zatem f jest 1-cyklem i wyznacza $[f] = [f]_{H_1} \in H_1 X$.
- Jeśli $f \simeq g$ homotopijne pętle

  [nawet niekoniecznie rel x_0; może to też być tzw. <u>wolna</u> homotopia, podczas której punkt bazowy pętli porusza się]

  to $[f]_{H_1} = [g]_{H_1} \in H_1 X$.

  (co będziemy oznaczać jako $f \sim g$ – mówiąc, że cykle f i g są <u>homologiczne</u>)

<u>Dowód</u> Podzielmy homotopię $f \simeq g$ na dwa 2-sympleksy singularne:



wtedy:

$$\partial(\sigma_1 - \sigma_2) = (f - b + a) - (a - b + g) = f - g$$

Zatem $f - g$ jest brzegiem, czyli $f \sim g$, $[f]_{H_1} = [g]_{H_1} \in H_1 X$. $\square$

- definiujemy $h : \pi_1(X, x_0) \to H_1 X$ przez

$$h([f]_{\pi_1}) := [f]_{H_1}.$$

2. h jest homomorfizmem grup

2 ćwiczenia

(1) pętla stała f, jako 1-ścieżka w X,

jest brzegiem,

a mianowicie brzegiem 2-ścieżki odpowiadającego

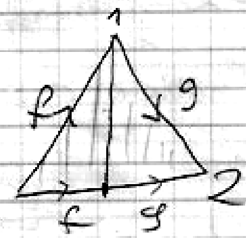
stałemu 2-sympleksowi singularnemu σ

(bo wtedy $\partial\sigma = f - f + f = f$). $\square$ czyli $f \sim 0$

(2) Oznaczając przez $f \cdot g$ konkatenację pętli f i g, mamy

$f \cdot g \sim f + g$.

Dowód: rozważmy 2-sympleks singularny σ



(Jego odwzorowanie w X

jest to złożenie rzutu prostokątnego na bok $[0\,2]$

ze skonkatenowaną pętlą $f \cdot g$).

Mamy $\partial\sigma = f - f\cdot g + g$

a to oznacza, że $0 = [f]_{H_1} - [f\cdot g]_{H_1} + [g]_{H_1}$

czyli $[f\cdot g]_{H_1} = [f]_{H_1} + [g]_{H_1} = [f+g]_{H_1}$. $\square$

FAKT. $h: \pi_1(X, x_0) \to H_1 X$ jest homomorfizmem

$$h\left([f]_{\pi_1} \cdot [g]_{\pi_1}\right) = h\left([f\cdot g]_{\pi_1}\right) = [f\cdot g]_{H_1} \overset{(2)}{=} [f]_{H_1} + [g]_{H_1} =$$

$$= h\left([f]_{\pi_1}\right) + h\left([g]_{\pi_1}\right). \ \square$$

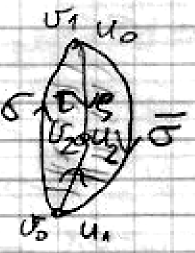
3. h jest surjektywny (gdy X jest drogowo spójne).

2 ćwiczenia

① jeśli $\sigma : [0,1] \to X$ 1-sympleks singularny, to oznaczmy przez $\bar{\sigma}$ 1-sympleks singularny zadany przez $\bar{\sigma}(t) = \sigma(1-t)$.

Wówczas $\sigma - \bar{\sigma}$ jest brzegiem, czyli $\sigma - \bar{\sigma} \sim 0$.

D-d:

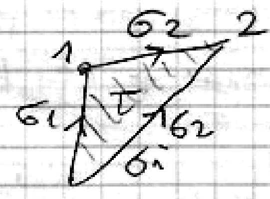


$$\sigma - \bar{\sigma} = \partial(\tau - \varrho) \quad \square$$

② Jeśli σ_1, σ_2 są konkatenowalnymi drogami w X, zaś $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ jest ich konkatenacją, to

$$\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \sim 0$$

D-d:



$$\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 = \partial \tau \quad \square$$

DOWÓD SURJEKTYWNOŚCI h

Niech $x \in H_1 X$, $x = [\sum n_i \sigma_i]$.

- Możemy zapisać $x = [\pm\sigma_1 \pm \sigma_2 \dots \pm \sigma_k]$ a następnie, dzięki ① zastąpić wszystkie $-\sigma_i$ przez $+\bar{\sigma}_i$ nie zmieniając klasy homologii, i otrzymując postać
  $x = [\sigma_1 + \dots + \sigma_k]$ (zmieniając nazwy niektórych $\bar{\sigma}_i$ na σ_i).
- Jeśli któreś σ_i nie jest pętlą, to istnieje σ_j taka że $\sigma_i(1) = \sigma_j(0)$ i wtedy, bez zmiany klasy homologii (dzięki ②) możemy zastąpić $\sigma_i + \sigma_j$ przez $\sigma_i \cdot \sigma_j$

Po skończenie wielu takich krokach otrzymujemy postać
$x = [\sigma_1 + \dots + \sigma_m]$, gdzie wszystkie σ_i są pętlami.

- Oznaczmy przez x_i punkt bazowy pętli σ_i.

Ponieważ X drogowo spójna, dla każdego i wybierzmy drogę γ_i od x_0 do x_i.

Mamy $\sigma_i \sim \gamma_i \sigma_i \overline{\gamma_i}$, bo te pętle są wolno homotopijne.

Zatem możemy założyć, że wszystkie σ_i są zbazowane w x_0.

- konkatenując pętle parami, pak 2 kroki wcześniej, otrzymujemy $x = [\sigma]$ dla pojedynczej pętli σ (dokładniej, dla $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_m$).

Zatem $x = [\sigma]_{H_1} = h([\sigma]_{\pi_1})$. $\square$

4. Ponieważ $H_1 X$ jest abelowa, mamy że komutator $[\pi_1 X, \pi_1 X] \subset \ker h$. Pokażemy

TW. $\ker h = [\pi_1 X, \pi_1 X]$

a co za tym idzie, h indukuje izomorfizm

$$(\pi_1 X)^{ab} := \pi_1 X / [\pi_1 X, \pi_1 X] \longrightarrow H_1 X.$$

UWAGA. Wystarczy pokazać, że $\ker h \subset [\pi_1 X, \pi_1 X]$.

5. Dowód że $\ker h \subset [\pi_1 X, \pi_1 X]$

Rozważmy dowolny $x \in \ker h$, i niech $x = [f]_{\pi_1}$

Wtedy $0 = h(x) = [f]_{H_1}$, czyli f jako 1-cykl jest brzegiem,

$f = \partial(\sum n_i \sigma_i)$, gdzie $\sigma_i : \Delta^2 \to X$ to 2-sympleksy singularne

* Możemy założyć, że $n_i = \pm 1$, czyli $f = \partial(\pm\sigma_1 \dots \pm\sigma_k)$

Przyjmując $\partial \sigma_i = \tau_{i,0} - \tau_{i,1} + \tau_{i,2}$, mamy

$$f = \sum_{i,j} \pm(\tau_{i,0} - \tau_{i,1} + \tau_{i,2})$$

a zatem składniki $\pm\tau_{i,j}$ po prawej redukują się parami, z wyjątkiem jednego składnika równego f

Przyjmując, że $\sigma_i : \Delta^2_i \to X$, Δ^2_i parami rozłączne

określmy $K = \dot\bigcup \Delta^2_i / \sim$ gdzie relacja $\sim$ odpowiada sklejeniu par boków odpowiadających redukującym się parom składników $\pm\tau_{i,j}$

Wtedy K jest 2-wymiarowym Δ-kompleksem, którego każda krawędź, z wyjątkiem jednej krawędzi e, należy do dokładnie dwóch 2-sympleksów, zaś krawędź e odpowiada termu $\pm\tau_{i,j}$ który jest bez pary i równa się f.

Określmy też $\sigma : K \to X$, jako indukowane na ilorazie przez odwzorowanie $\dot\bigcup \sigma_i : \dot\bigcup \Delta^2_i \to X$.

Wtedy $\sigma|_e = f$.

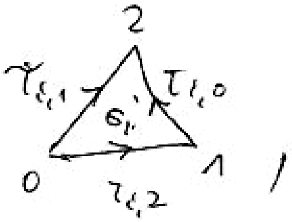
* Odwzorowanie $\sigma: K \to X$ można przehomotopować w X do odwzorowania $\sigma': K \to X$ takiego, że

- $\sigma'|_e = \sigma|_e = f$
- $\sigma'(v) = x_0$ dla każdego wierzchołka v w K

Na e homotopię określamy jako stałą, na wierzchołkach v możemy określić jakkolwiek korzystając z drogowej spójności X, zaś rozszerzenie do K istnieje z własności rozszerzania homotopii dla par CW-kompleksów (ale można też takie rozszerzenie łatwo opisać elementarnie).

Mamy też odpowiednio przehomotopowane $\sigma_i': \Delta_i^2 \to X$

* Stosując oznaczenie $\partial(\sigma_i') = \tau_{i,0}' - \tau_{i,1}' + \tau_{i,2}'$,



, mamy zależności

$$[\tau_{i,0}]_{\pi_1} \cdot [\tau_{i,1}]_{\pi_1}^{-1} [\tau_{i,2}]_{\pi_1} = 0$$

bo pętla $\tau_{i,0} \cdot \tau_{i,1} \cdot \tau_{i,2}$ ściągalne do punktu

* Zatem w $(\pi_1 X)^{ab} = \pi_1 X / [\pi_1 X, \pi_1 X]$ mamy

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \left([\tau_{i,0}]_{\pi_1}^{ab} \left([\tau_{i,1}]_{\pi_1}^{ab} \right)^{-1} [\tau_{i,2}]_{\pi_1}^{ab} \right)^{\pm 1} = [f]_{\pi_1}^{ab} \sum_{\substack{\text{1-krawędzie} \\ \tau \text{ w } K \\ \text{różne od } e}} [\tau]_{\pi_1}^{ab} \left[[\tau]_{\pi_1}^{-1} \right]^{ab} =$$

$$= [f]_{\pi_1}^{ab}$$

Zatem $x = [f]_{\pi_1} \in [\pi_1 X, \pi_1 X]$, czyli $\ker h \subset [\pi_1 X, \pi_1 X]$. $\square$