HOMOLOGIE ZE WSPÓŁCZYNNIKAMI

G - dowolna grupa abelowa, X - przestrzeń, $A \subset X$ podprzestrzeń

Singularne kompleksy łańcuchowe $C_*(X;G)$ oraz $C_*(X,A;G)$:

- $C_k(X;G) := \{ \sum_{SK} n_i \sigma_i : n_i \in G, \sigma_i$ - singularne k-sympleksy w $X\}$
- $C_k(X,A;G) = C_k(X;G)/C_k(A;G)$ — grupy abelowe
- brzegowanie $\partial = \partial_k^G : C_k(X;G) \to C_{k-1}(X;G)$ oraz $\partial : C_k(X,A;G) \to C_{k-1}(X,A;G)$ } homomorfizmy

zdefiniowane identycznie, z identycznym uzasadnieniem że $\partial^2 = 0$

[tzn. dla $\sigma : \Delta^k \to X$, $\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \circ \partial_i$,

$\partial_i : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$, $\partial_i(v_j) = \begin{cases} v_j & \text{dla } j < i \\ v_{j-1} & \text{dla } j \geq i \end{cases}$]

DEF. $H_n(X;G) := \operatorname{Ker} \partial_n^G / \operatorname{Im} \partial_{n+1}^G = Z_n(X;G)/B_n(X;G)$

$H_n(X,A;G) :=$ — " —

Zredukowane grupy homologii: $\tilde{H}_n(X;G)$ odpowiadają kompleksowi łańcuchowemu

$$\dots \xrightarrow{\partial_2^G} C_1(X;G) \xrightarrow{\partial_1^G} C_0(X;G) \xrightarrow{\varepsilon} G$$

gdzie $\varepsilon(\sum n_i v_i) = \sum n_i \in G$ (homomorfizm augmentacji),

i jak poprzednio mamy $\tilde{H}_i(X;G) = H_i(X;G)$ dla $i > 0$, oraz

$\tilde{H}_0(X;G) < H_0(X;G)$, $H_0(X;G)/\tilde{H}_0(X;G) \cong G$.

PRZYKŁAD. Dla $G = \mathbb{Z}_2$

- Łańcuchy to skończone sumy formalne sympleksów singularnych - $\sum \sigma_i$
- brzegowania nie biorą pod uwagę znaków:

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} \sigma \circ \partial_i,$$

PRZYKŁAD. Dla $G = \mathbb{Z}$ mamy $H_*(X;\mathbb{Z}) = H_* X$,

$H_*(X,A;\mathbb{Z}) = H_*(X,A)$

Dla ciągłego $f: X \to Y$ $[$lub $f:(X,A) \to (Y,B)]$
identycznie definiuje się $f_\#: C_*(X;G) \to C_*(Y;G)$
$[$lub $f_\#: C_*(X,A;G) \to C_*(Y,B;G)]$
przez [jako indukowane przez] $f_\#(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i (f \circ \sigma_i)$

i identycznie pokazuje się, że $f_\#$ komutuje z ∂
a zatem indukuje $Hf^G: H_*(X;G) \to H_*(Y;G)$
$[$lub $Hf^G: H_*(X,A;G) \to H_*(Y,B;G)]$

IDENTYCZNIE DOWODZI SIĘ TEŻ:

(0) $f,g:(X,A) \to (Y,B)$ homotopijne, to $Hf^G = Hg^G$

(1) homotopijna niezmienniczość $H_*(-;G)$;

(2) Ciąg dokładny pary (X,A):

$$\ldots \to H_k(A;G) \xrightarrow{Hi} H_k(X;G) \xrightarrow{Hj} H_k(X,A;G) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(A;G) \to$$

z identycznie określonym homomorfizmem brzegowania

$$\partial: H_k(X,A;G) \to H_{k-1}(A;G)$$

przez $\partial([[c]]) = [\partial c]$ dla $c \in C_k(X;G)$ reprezentującego cykl $[c] \in C_k(X,A;G) = C_k(X;G)/C_k(A;G)$

[podwójny reprezentant: najpierw w $C(X,G)/C(A,G)$, potem w homologii]

(2a) tw. o wycinaniu: $Z \subset A \subset X$, $\overline{Z} \subset \operatorname{int} A$, to $(X-Z, A-Z) \xrightarrow{i} (X,A)$ indukuje izomorfizm $H_n(X-Z, A-Z;G) \to H_n(X,A;G)$ dla każdego n

(2b) ciąg dokładny ilorazowania

$$\ldots \to H_k(A;G) \xrightarrow{Hi} H_k(X;G) \xrightarrow{Hj} H_k(X/A;G) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(A;G) \to \ldots$$

dla dobrych par (X,A), tzn. takich że A niepusty, domknięty i jest retraktem deformacyjnym swojego otwartego otoczenia w X (np. $A \subset X$ podkompleks w CW-kompleksie).

(3) $$\tilde{H}_n(S^k;G) = \begin{cases} G & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

Tak samo definiuje się homologie komórkowe $H_*^{CW}(X;G)$ dla CW-kompleksu X:

- $C_n^{CW}(X;G) := H_n(X^n, X^{n-1}; G) \cong G^{\oplus[\# n \text{ komórek w } X]}$
- brzegowanie $d_n^G : C_n^{CW}(X;G) \to C_{n-1}^{CW}(X;G)$ zadane przez złożenie

$$\begin{tikzcd} H_n(X^n, X^{n-1}; G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[rr, bend right, "d_n^G"'] & H_{n-1}(X^{n-1}; G) \arrow[r, "j_{n-1}"] & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}; G) \end{tikzcd}$$

gdzie ∂ jest z ciągu pary (X^n, X^{n-1})

zaś j jest z ciągu pary (X^{n-1}, X^{n-2}),

które spełnia $d_{n-1}^G d_n^G = 0$ z identycznym uzasadnieniem

- $H_n^{CW}(X;G) := \ker d_n^G / \operatorname{Im} d_{n-1}^G$

Tak samo też dowodzi się, że $H_*^{CW}(X;G) \cong H_*(X;G)$

ARYTMETYKA HOMOLOGII KOMÓRKOWYCH $H_*^{CW}(X;G)$

(1) $\mathcal{X}_n$ – zbiór n-komórek w X – $\alpha = (D^n_\alpha, \varphi_\alpha : \partial D^n_\alpha \to X^{n-1})$, wówczas $C_n^{CW}(X;G) \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{X}_n} G_{[\alpha]}$, tak samo jak gdy $G = \mathbb{Z}$.

(2) Dla $G = \mathbb{Z}$, $C_n^{CW}(X;\mathbb{Z}) = C_n^{CW} X = \bigoplus_{\alpha} \mathbb{Z}_{[\alpha]}$

gdzie każdy α utożsamiony z generatorem w $\mathbb{Z}_{[\alpha]}$ ($\mathcal{X}_n$ jest bazą w $C_n^{CW} X$).

(3) Dla $G = \mathbb{Z}$ i dla $\alpha \in \mathcal{X}_n$, $\beta \in \mathcal{X}_{n-1}$, mamy

$$d_{\alpha,\beta} := \deg \left[\begin{tikzcd} \partial D^n_\alpha \arrow[r, "\Delta_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, equal] & X^{n-1}/(X^{n-1} - \mathrm{int}\,\beta) = D^{n-1}_\beta / \partial D^{n-1}_\beta \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ S^{n-1} & D^{n-1}/\partial D^{n-1} \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ & S^{n-1} \end{tikzcd} \right]$$

WYBÓR kanonicznego utożsamienia (jednoznacznego z dokł. do homotopii) respektującego orientacje

i mamy taki wzór

$$d_n(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathcal{X}_{n-1}} d_{\alpha,\beta} \cdot \beta .$$

(4) dla dowolnego G jest problem, bo homomorfizm

$$\begin{array}{ccc} (\Delta_{\alpha,\beta})_*: H_{n-1}(\partial D^n_\alpha; G) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-1}\setminus \mathrm{int}\,\beta; G) \\ \| & & \| \\ H_{n-1}S^{n-1} & & H_{n-1}S^{n-1} \\ \| & & \| \\ G & \longrightarrow & G \end{array}$$

a priori nie daje się opisać jedną liczbą całkowitą.

LEMAT. Odwzorowanie $f: S^k \to S^k$ stopnia m indukuje odwzorowanie $f_*^G: H_k(S^k;G) \to H_k(S^k;G)$, $G \to G$, będące braniem m-krotności w G

$$\Big[\, g \mapsto \underbrace{g + \dots + g}_{m \text{ razy}} \ \text{gdy } m \geq 0;\ g \mapsto \underbrace{-g - \dots - g}_{|m| \text{ razy}} \ \text{gdy } m < 0 \,\Big]$$

UWAGA: $g \mapsto mg$ jest homomorfizmem dla dowolnej grupy abelowej G i dla dowolnego ustalonego całkowitego m.

Z LEMATU WYNIKA

, że oznaczając element $g \in G_{[\alpha]} \subset \bigoplus_\alpha G_{[\alpha]} = C_n^{CW}(X;G)$ przez $g\alpha$ otrzymujemy wzór na komórkowe brzegowanie

$$\begin{array}{ccc} d_n^G: C_n^{CW}(X;G) & \longrightarrow & C_{n-1}^{CW}(X;G) \\ \| & & \\ \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_n} G_{[\alpha]} & \longrightarrow & \bigoplus_{\beta \in \Sigma_{n-1}} G_{[\beta]} \end{array}$$

postaci

$$d_n^G(g\cdot\alpha) = \sum_{\beta \in \Sigma_{n-1}} (d_{\alpha,\beta}\cdot g)\cdot\beta.$$

Mamy więc jawny opis kompleksu komórkowego $C_n^{CW}(X;G)$ pozwalający na wyznaczanie homologii $H_*^{CW}(X;G)$.

Dla dowodu LEMATU potrzebna będzie własność

(6) Niech $\varphi: G_1 \to G_2$ będzie homomorfizmem grup abelowych

- dla dowolnych (X,A) φ indukuje $\varphi_\#: C_n(X,A;G_1) \to C_n(X,A;G_2)$ zadany przez $\varphi_\#(\Sigma n_i \sigma_i) = \Sigma \varphi(n_i)\sigma_i$
- $\varphi_\#: C_*(X,A;G_1) \to C_*(X,A;G_2)$ komutuje z brzegowaniami $\partial^{G_1}, \partial^{G_2}$, a więc indukuje homomorfizmy $\varphi_*: H_n(X,A;G_1) \to H_n(X,A;G_2)$, i to samo dla homologii zredukowanych

  [$\varphi_\#$ jest morfizmem kompleksów łańcuchowych]
- homomorfizmy φ_* są naturalne, tzn.
  - komutują z f_* dla dowolnego $f:(X,A) \to (Y,B)$
  - długie ciągi dokładne pary (X,A) o współczynnikach z G_1 i z G_2, po połączeniu homomorfizmami φ_*, tworzą diagram komutujący

Dowód LEMATU

Weźmy dowolny $g \in G$. Niech $\varphi: \mathbb{Z} \to G$ zadany przez $\varphi(1) = g$.

Rozważmy diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\varphi"'] & \tilde{H}_k(S^k;\mathbb{Z}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \tilde{H}_k(S^k;\mathbb{Z}) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\varphi"] \\
G \arrow[r, phantom, "\cong"] & \tilde{H}_k(S^k;G) \arrow[r, "f_*^G"] & \tilde{H}_k(S^k;G) \arrow[r, phantom, "\cong"] & G
\end{tikzcd}$$

i środkowy kwadrat komutuje z naturalności

FAKT 1. Lewy i prawy kwadrat komutują $\forall k$.

FAKT 2. Zatem $f_*^G(g) = m \cdot g$

[bo $f_*(1) = m$, a zatem

$$f_*^G(g) = f_*^G \varphi(1) = \varphi f_*(1) = \varphi(m) = mg]$$

Skoro tak jest $\forall g \in G$, LEMAT zachodzi. $\square$ (Pozostaje wykazać FAKT 1)

D-d FAKTU 1

(indukcja po k, że komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[d, "\varphi"] & H_k(S^k;\mathbb{Z}) \arrow[l, "\cong", "\psi_{\mathbb{Z}}"'] \arrow[d, "\varphi_*"] \\ G & H_k(S^k;G) \arrow[l, "\cong", "\psi_G"'] \end{tikzcd}$$

1°. D-d dla $k=0$ $\quad S^0=\{v_+,v_-\}$

$$\tilde{B}_0(S^0;G)=0$$

$$\tilde{H}_0(S^0;G)=\tilde{Z}_0(S^0;G)\ \overset{\psi_G}{\underset{\cong}{\longrightarrow}}\ G\,,\quad \psi_G(n\cdot v_+-n\cdot v_-)=n \quad \forall n\in G$$

Wtedy,

dla dowolnego $nv_+-nv_-\in H_0(S^0;\mathbb{Z})$ mamy

$$\psi_G\varphi_*(nv_+-nv_-)=\psi_G(\varphi(n)\cdot v_1-\varphi(n)\cdot v_2)=\varphi(n)=$$

$$=\varphi\psi_{\mathbb{Z}}(nv_+-nv_-).$$ Stąd komutowanie.

2°. Krok indukcyjny

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \tilde{H}_k(S^k;\mathbb{Z}) \arrow[r, "j_*", "\cong"'] \arrow[d, "\varphi_*"] \arrow[dr, phantom, "\text{ciąg pary}"] & \tilde{H}_k(S^k,D^k;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\varphi_*"] \arrow[dr, phantom, "\text{wycinanie}"] & \tilde{H}_k(D^k,S^{k-1};\mathbb{Z}) \arrow[d, "\varphi_*"] \arrow[drr, "\partial"] \arrow[dr, phantom, "\text{ciąg pary}"] & & \\ \tilde{H}_k(S^k;G) \arrow[r, "j_*", "\cong"'] \arrow[drrr, bend right, "\cong"', "\text{ten izomorfizm z def. był zadany jako kompozycja powyższych}"] & \tilde{H}_k(S^k,D^k;G) \arrow[r, "\cong"] & \tilde{H}_k(D^k,S^{k-1};G) \arrow[dr, "\partial"] & & \\ & & & \tilde{H}_{k-1}(S^{k-1};G) \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\text{założenie indukcyjne}"] & \tilde{H}_{k-1}(S^{k-1};\mathbb{Z}) \arrow[l, "\varphi_*"'] \arrow[d, "\cong"] \\ & & & G & \mathbb{Z} \arrow[l, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

$\square$

PRZYKŁAD. $\mathbb{R}P^n = S^n/\mathbb{Z}_2$ (antypodyzm) $\quad n \geq 1$

struktura komórkowa na S^n: $e^0_+, e^0_-, e^1_+, e^1_-, \dots, e^n_+, e^n_-$

indukuje strukturę komórkową na $\mathbb{R}P^n = S^n/\mathbb{Z}_2$:

$e^0, e^1, \dots, e^n$ – po 1 komórce w każdym wymiarze

komórkowe brzegowania

$$d_{n,n-1} = \deg\left[\partial e^n \xrightarrow{\Delta_{n,n-1}} e^{n-1}/\partial e^{n-1}\right] = \begin{cases} 2 & n \text{ parzyste} \\ 0 & n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

[bo $\deg(\text{anty}_{S^{n-1}}) = \begin{cases} 1 & n \text{ parzyste} \\ -1 & n \text{ nieparzyste} \end{cases}$

zaś $\deg(\Delta_{n,n-1}) = \deg(id_{S^{n-1}}) + \deg(\text{anty}_{S^{n-1}})$]

$C^{CW}_*(\mathbb{R}P^n; G)$ ma postać:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \to & 0 & \to & G & \to & \cdots & \xrightarrow{\times 2} & G & \xrightarrow{0} & G & \xrightarrow{\times 2} & G & \xrightarrow{0} & G & \to & 0 \\ \dim & & n+1 & & n & & \cdots & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 \end{array}$$

- dla $G = \mathbb{Z}$, $\quad H_k \mathbb{R}P^n = \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0 \\ \mathbb{Z}_2 & k \text{ nieparzyste}, k<n \\ 0 & k \text{ parzyste} \\ \mathbb{Z} & k=n \quad \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \\ 0 & k=n \quad \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ 0 & k>n \end{cases}$

- dla $G = \mathbb{Z}_2$, $\quad H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{dla } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{dla } k>n \end{cases}$

$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times 2 = 0} \mathbb{Z}_2$

UWAGA. Gdy G jest ciałem (np. $G = \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$; ogólnie $G = K$)
to $C_k(X, K)$ i $C_k^{cw}(X, K)$
są p. wekt. nad K [np. $a \cdot (\sum n_i \sigma_i) = \sum (a n_i) \sigma_i$]

Zaś $\partial_n : C_n(X, K) \to C_{n-1}(X, K)$ oraz
$\partial_n^{cw} : C_n^{cw}(X, K) \to C_{n-1}^{cw}(X, K)$
są przekszt. liniowymi nad K
[z definicji: $\partial(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i \cdot \partial(\sigma_i)$]

Zatem $Z_n(X, K) = \ker \partial_n$
$B_n(X, K) = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$
$H_n(X, K) = Z_n(X, K) / B_n(X, K)$
są p. wektorowymi nad K
To samo dotyczy grup zredukowanych i homologii relatywnych.
Podobnie, wszystkie homomorfizmy indukowane przez odwzorowania i wszystkie homomorfizmy dołączone w długich ciągach dokładnych, są wtedy przekszt. lin. nad K