PROP1. Jeśli $D \subset S^n$ jest homeo z D^k, $k \geq 0$, to

$$\tilde{H}_i(S^n - D) = 0 \quad \forall i.$$

OZNACZENIA.

(1) Niech $h : D^k \to D$ homeo.

Zamiast $S^n - D$ możemy pisać $S^n - h(D^k)$

(2) Utożsamiając D^k z $I^k = [0,1]^k$, możemy pisać $D = h(I^k)$,

$$S^n - D = S^n - h(I^k). \quad \left(h : I^k \to \underset{S^n}{\underset{\cap}{D}} \text{ - homeo}\right).$$

Dowód PROP. Indukcja względem k. Dla $k=0$ oczywiste, bo $S^n - h(D^0) \cong \mathbb{R}^n$ jest ściągalne do punktu.

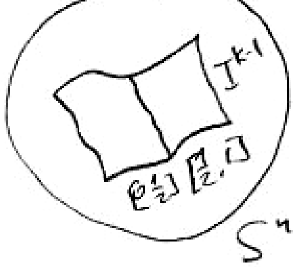
GŁÓWNY KROK INDUKCYJNY: niech $k > 0$ i niech

$$A = S^n - h\left(I^{k-1} \times [0, \tfrac{1}{2}]\right), \quad B = S^n - h\left(I^{k-1} \times [\tfrac{1}{2}, 1]\right)$$

Wówczas: $A \cap B = S^n - h(I^k)$,

$A \cup B = S^n - h\left(I^{k-1} \times \{\tfrac{1}{2}\}\right)$,

oraz A i B są otwarte w $A \cup B$.



Z założenia indukcyjnego,

$\tilde{H}_i(A \cup B) = 0 \quad \forall i.$ | CEL: $\tilde{H}_i(A \cap B) = 0 \quad \forall i$

Mayer-Vietoris:

$$\underset{0}{\underset{\|}{\tilde{H}_{i+1}(A \cup B)}} \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_i(A \cap B) \xrightarrow{i_1^* \oplus i_2^*} \tilde{H}_i A \oplus \tilde{H}_i B \to \underset{0}{\underset{\|}{\tilde{H}_i(A \cup B)}}$$

Zatem $i_1^* \oplus i_2^*$ jest izomorfizmem, gdzie

$i_1 : A \cap B \to A$, $i_2 : A \cap B \to A$ - włożenia.

PROP 2. Jeśli $S \subset S^n$ jest homeomorficzne z S^k dla pewnego $0 \leq k < n$, to

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus S) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{dla } i = n-k-1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } i. \end{cases}$$

Dowód: indukcja względem k.

Dla $k=0$, $S \cong S^0$ to dwa punkty, i wtedy $S^n \setminus S \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$

i faktycznie mamy

$$\tilde{H}_i(S^{n-1} \times \mathbb{R}) = \tilde{H}_i S^{n-1} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{dla } i = n-1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } i. \end{cases}$$

GŁÓWNY KROK INDUKCYJNY

Niech $S = D \cup D'$, gdzie D, D' homeo z D^k, $D \cap D'$ homeo z S^{k-1}.

Dla $A = S^n \setminus D$, $B = S^n \setminus D'$ mamy

$A \cap B = S^n \setminus S$, $A \cup B = S^n \setminus (D \cap D')$.

$\tilde{H}_i A = \tilde{H}_i B = 0$ $\forall i$, z PROP 1.

Zatem z ciągu Meyera-Vietorisa

$$\tilde{H}_{i-1} A \oplus \tilde{H}_{i-1} B \to \tilde{H}_{i-1}(A \cup B) \xrightarrow[\cong]{} \tilde{H}_i(A \cap B) \to \tilde{H}_i A \oplus \tilde{H}_i B$$

mamy izomorfizm $\tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus \underset{S^{k-1}}{\underbrace{(D \cap D')}}) \cong \tilde{H}_i(S^n \setminus S)$, skąd teza. $\square$

Dokładniej:

$$i_1 : S^n \setminus h(I^k) \to S^n \setminus h\left(I^{k-1}\times[0,\tfrac{1}{2}]\right)$$

$$i_2 : S^n \setminus h(I^k) \to S^n \setminus h\left(I^{k-1}\times[\tfrac{1}{2},1]\right)$$

Zatem, dowolny zredukowany i-cykl α nie będący brzegiem w $S^n \setminus h(I^k)$ również nie jest brzegiem w przynajmniej jednym spośród zbiorów $S^n \setminus h\left(I^{k-1}\times[0,\frac{1}{2}]\right)$, $S^n \setminus h\left(I^{k-1}\times[\frac{1}{2},1]\right)$.

Iterując powyższe rozumowanie, uzyskujemy nieskończony ciąg przedziałów $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m \supset \dots$ o długościach malejących do 0, takich że i-cykl α nie jest brzegiem w $S^n \setminus h(I^{k-1}\times I_m)$.

Oznaczmy $\{p\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_m$.

Z założenia indukcyjnego, ponieważ $\tilde{H}_i\, S^n \setminus h(I^{k-1}\times\{p\}) = 0$, cykl α jest brzegiem w $S^n \setminus h(I^{k-1}\times\{p\})$.
Niech β będzie $(i+1)$-łańcuchem w $S^n \setminus h(I^{k-1}\times\{p\})$ takim, że $\alpha = \partial\beta$.
Ponieważ β jest skończoną kombinacją $(i+1)$-sympleksów singularnych które mają zwarte obrazy, istnieje takie m że obrazy wszystkich tych sympleksów zawarte są w $S^n \setminus h(I^{k-1}\times I_m)$.
Ale to znaczy, że α jest brzegiem w $S^n \setminus h(I^{k-1}\times I_m)$, co jest sprzeczne z wcześniejszymi ustaleniami. Ta sprzeczność pokazuje, że w $S^n \setminus h(I^k)$ nie ma cykli nie będących brzegami, a stąd $\tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^k)) = 0$. □

UWAGI.

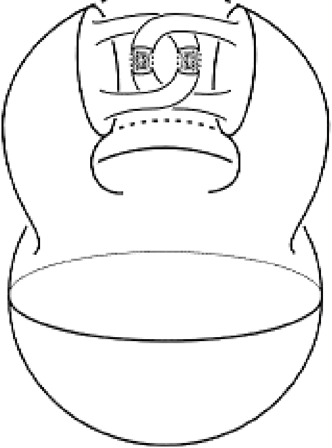
1. Dla $n=2$, $k=1$ PROP 2 mówi, że zamknięta włożona krzywa C w S^2 spełnia
$$\widetilde{H}_0(S^2 \setminus C) = \mathbb{Z},$$
a to oznacza że $S^2 \setminus C$ ma dwie komponenty drogowej spójności.
Jest to więc Twierdzenie Jordana.

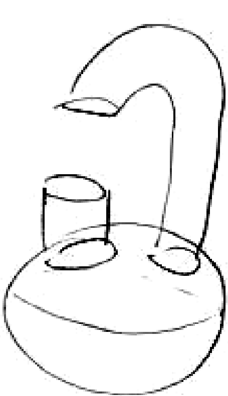
2. Dla dowolnego n oraz $k=n-1$ dostajemy, że
$$\widetilde{H}_0(S^n \setminus h(S^{n-1})) \cong \mathbb{Z}$$
czyli $S^n \setminus h(S^{n-1})$ ma 2 komponenty drogowej spójności, (Uogólnione Twierdzenie Jordana).

3. Podzbiór w S^n homeomorficzny z S^{n-1} może być całkiem „dziko" włożony, jak to pokazuje choćby przykład tzw. <u>rogatej sfery Alexandera</u>

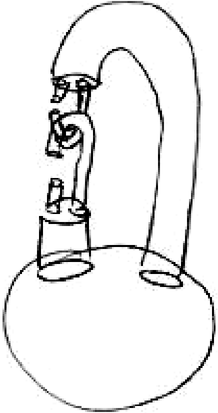
4. Dla $n=3$, $k=1$, włożone krzywe $C \subset S^3$ mogą być „zawęźlone". We wszystkich tych przypadkach i tak dostaniemy $\widetilde{H}_1(S^3 \setminus C) \cong \mathbb{Z}$.

5. Podobnie „zawęźlone" mogą być sfery $h(S^{n-2}) \subset S^n$, i też dostajemy
$$\widetilde{H}_1(S^n \setminus h(S^{n-2})) \cong \mathbb{Z}.$$





Z_0



Z_1

$\cdots$

$\bigcup_{n\geq 0} Z_n$

$\bigcap_{n\geq 0} X_n = \bigcup_{n\geq 0} Z_n = B$, breg ∂B – rog. sf. Alexandera

TWIERDZENIE O NIEZMIENNICZOŚCI OBSZARU

Jeśli podzbiór X w $\mathbb{R}^n$ jest homeo z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$, to sam jest otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$.

UWAGA.

Obszar = otwarty podzbiór w $\mathbb{R}^n$.

INNYMI SŁOWY: Każdy podzbiór homeo z obszarem jest obszarem.

Dowód:

Traktując $\mathbb{R}^n$ jako dopełnienie punktu w S^n, możemy zapisać równoważne sformułowanie:

jeśli $X \subset S^n$ jest homeo z otwartym podzbiorem w S^n, to X jest otwarty w S^n.

Udowodnimy ten równoważny wariant.

Niech $h: X \to U \subset S^n$ homeo na otwarty podzbiór

Dla ~~d~~ dowolnego $x \in X$, niech $h(x) \in D^n \subset U$ -

- dyskowe otoczenie dla którego $h(x)$ jest środkiem

i niech $D = h^{-1}(D^n)$, $S = h^{-1}(\partial D^n)$ - podzbiory X,

a więc też S^n.

$S^n \setminus D$ jest otwarty

a dzięki PROP 1 jest też drogowo spójny

więc dzięki otwartości jest po prostu spójny.

$S^n \setminus S$ jest także otwarty,

a dzięki PROP 2 ma dwie komponenty drogowej spójności,

czyli dwie komponenty spójności.

Ale $S^n \setminus S = (S^n \setminus D) \cup (D \setminus S)$,

i obie składniki są spójne, więc to muszą być te

komponenty spójności w $S^n \setminus S$.

Stąd wynika, że $D \setminus S$ jest otwartym otoczeniem x w S^n

(bo komponenta podzbioru otwartego jest otwarta).

Ale $D \setminus S \subset X \subset S^n$

więc x ma w S^n otwarte otoczenie zawarte w X.

Stąd X jest otwarty w S^n. $\square$

WNIOSEK. Każde zanurzenie (czyli ciągła injekcja) $f: M^n \to N^n$ jest odwzorowaniem otwartym.

D-d:

Pokażemy, że każdy punkt $x \in M^n$ posiada otwarte otoczenie U, którego obraz $f(U)$ jest otwarty w N^n, skąd otwartość bezpośrednio wynika.

Niech V - otoczenie $f(x)$ w N^n homeo z $\mathbb{R}^n$, i niech U takie (otwarte) otoczenie x w M^n, że $\overline{U}$ jest zwarte i że $f(U) \subset V$.

Wówczas $f: \overline{U} \to f(\overline{U})$ jest homeomorfizmem, więc $f: U \to f(U)$ też jest homeomorfizmem.

Z niezmienniczości obszaru, $f(U)$ jest wtedy otwarte w V, czyli także otwarte w N^n. $\square$