KLASYFIKACJA $\mathbb{R}$-ALGEBR PRZEMIENNYCH Z DZIELENIEM I Z JEDNOŚCIĄ.

Def. <u>$\mathbb{R}$-algebra</u>, lub <u>algebra nad $\mathbb{R}$</u>, to przestrzeń wektorowa V nad $\mathbb{R}$ z dwuliniowym działaniem $V \times V \to V$, $(a,b) \to a \cdot b$, zwanym <u>mnożeniem</u>.

Dokładniej
$$(a+b)c = ac+bc$$
$$a(b+c) = ab+ac$$
} dwustronna rozdzielność mnożenia względem dodawania

$$\alpha \cdot (ab) = (\alpha a) b = a(\alpha b)$$
łączność z mnożeniem przez skalar

lub jeszcze inaczej, mnożenie z lewej i z prawej strony przez dowolny element $a \in V$, czyli odwzorowanie $V \to V$ zadane przez $x \to ax$ lub $x \mapsto xa$ jest liniowe.

Będziemy zakładać że V jest skończenie wymiarowa, $V = \mathbb{R}^n$ dla pewnego n (co ogólnie nie musi mieć miejsca).

Def. <u>Algebra z dzieleniem</u> to taka algebra, że równania
$$ax = b, \quad xa = b \quad \text{mają rozwiązania } \forall a \neq 0, \forall b.$$
Równoważnie, mnożenie przez a z lewej i z prawej jest surjekcją (a przy naszym założeniu że $V = \mathbb{R}^n$, izomorfizmem). (a więc rozwiązania powyższych równań są jednoznaczne)

Def. <u>Jedność</u> w algebrze, jest taki element $1 \in V$ że
$$1 \cdot a = a = a \cdot 1 \quad \forall a \in V.$$

Def. Algebra jest <u>przemienna</u> jeśli $ab = ba \quad \forall a,b \in V$.

Def. Algebra jest <u>łączna</u>, jeśli $(ab)c = a(bc) \quad \forall a,b,c \in V$.

KLASYCZNE PRZYKŁADY algebr z dzieleniem to

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ - kwaterniony, $\mathbb{O}$ - oktawy Hamiltona

$\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ nie są przemienne

$\mathbb{O}$ nie jest łączne.

Wszystkie są z jednością.

Wszystkie spełniają dodatkowy warunek $|ab| = |a|\cdot|b|$.

[Frobenius, 1877] $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ to jedyne (sk. wymiarowe) algebry łączne (z dzieleniem i) z jednością.

[Hurwitz, 1898] Jeśli V sk. wym. algebra z dzieleniem spełniająca $|ab| = |a|\cdot|b|$ (niekoniecznie łączna i z jednością) to $\dim V \in \{1, 2, 4, 8\}$.

[Inni wzmocnili] jeśli ponadto V jest z jednością, to $V \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$.

[Kervaire, Milnor, 1958] $\mathbb{R}^n$ ma strukturę algebry z dzieleniem tylko dla $n = 1, 2, 4, 8$.

My pokażemy sobie

TWIERDZENIE: Jedyne sk. wym. $\mathbb{R}$-algebry z dzieleniem, przemienne i z jednością, to $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{C}$.

dowód:

Na początku zał. że mamy na pewno $\mathbb{R}^n$ strukturę przemiennej algebry z dzieleniem.

1°. Określmy $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ przez $f(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$, co ma sens bo dla $x \neq 0$ mamy $x^2 \neq 0$

* $x \cdot 0 = 0 \quad \forall x$
* gdyby $x^2 = 0$ to $x \cdot y = 0$ miałoby 2 rozwiązania względem y, $y = x$ oraz $y = 0$
* sprzeczność z surjektywnością mnożenia przez x

2°. f ciągłe, bo mnożenie jest ciągłe jako dwuliniowe

3°. $f(-x) = f(x)$, więc f indukuje $\overline{f}: \mathbb{RP}^{n-1} \to S^{n-1}$ ciągłe.

4°. $\overline{f}$ jest różnowartościowe.

dowód: równość $f(x) = f(y)$ oznacza $\frac{x^2}{|x|^2} = \frac{y^2}{|y|^2}$, czyli

$x^2 = \alpha^2 \cdot y^2$, gdzie $\alpha = \sqrt{\frac{|x|^2}{|y|^2}}$

* Zatem mamy $x^2 - \alpha^2 y^2 = 0$, czyli

$(x + \alpha y)(x - \alpha y) = 0$ (tu korzystamy z przemienności algebry)

* ponieważ w algebrze z dzieleniem nie ma dzielników zera czyli nie ma niezerowych elementów a, b takich że $ab = 0$

więc $x = \pm \alpha y$,

a ponieważ $x, y \in S^{n-1}$, więc $x = \pm y$

* zatem x, y wyznaczają ten sam element w $\mathbb{RP}^{n-1}$. □

5°. Ciągłe różnowartościowe odwzorowanie przestrzeni zwartej jest homeomorfizmem na obraz, czyli włożeniem

* jeśli więc $n > 1$, to $\bar{f} : \mathbb{R}P^{n-1} \to S^{n-1}$ ma obraz
  - zwarty, a więc domknięty w S^{n-1}, ze zwartości $\mathbb{R}P^{n-1}$
  - otwarty, bo $\bar{f}$ (jako włożenie $(n-1)$-wym. w $(n-1)$-wym) jest otwarte, z tw. o niezmienniczości obszaru (poprzedni wykład);

z spójności S^{n-1}, $\bar{f}$ jest homeomorfizmem $\mathbb{R}P^{n-1}$ na S^{n-1}

* to jest możliwe tylko gdy $n-1=1$, czyli $n=2$, bo dla $n > 2$ $\mathbb{R}P^{n-1}$ oraz S^{n-1} nie są homeo (różne homologie).

4''

Dostaliśmy ograniczenie na wymiar: $n \in \{1,2\}$

(bez korzystania z istnienia jedności).

Teraz załóżmy istnienie jedności 1.

* gdy $n=1$, każdy element algebry ma postać $\alpha \cdot 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

  $(\alpha\cdot 1)(\beta\cdot 1) = \alpha\beta(1\cdot 1) = (\alpha\beta)\cdot 1$

  więc algebra jest tożsama z $\mathbb{R}$.

* gdy $n=2$ [elementy $\alpha\cdot 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$ utożsamiamy z $\alpha \in \mathbb{R} \subset V$]

  - weźmy dowolny j nie mający postaci $\alpha\cdot 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (czyli α); wtedy $\{1, j\}$ tworzą bazę algebry jako p. wekt.
  - niech $j^2 = a + bj$ dla $a,b\in\mathbb{R}$;

    wtedy $\left(j-\frac{b}{2}\right)^2 = j^2 - bj + \frac{b^2}{4} = a+bj-bj+\frac{b^2}{4} = a+\frac{b^2}{4}$;

    Zamieniając j na $j-\frac{b}{2}$ możemy założyć, że

    $j^2 = a \in \mathbb{R}$
  - przypuszczenie że $a \geq 0$ prowadzi do sprzeczności, bo wtedy $a=c^2$, $j^2=c^2$, $(j+c)(j-c)=0$, więc $j=\pm c$ [sprzeczność z wyborem j].
  - Zatem $j^2=-c^2$, więc $\left(\frac{j}{c}\right)^2 = -1$, i tu już dostajemy $V \cong \mathbb{C}$. □

UWAGA.

(1) Bez założenia istnienia jedności mamy $V \in \mathbb{R}$ lub $\dim V = 2$.

(2) Istnieją przykłady 2-wymiarowych przemiennych algebr z dzieleniem i bez jedności, np. $\mathbb{C}$ z mnożeniem $z \cdot w = \overline{zw}$.

Ćw. Znajdź inne takie 2-wymiarowe algebry.

Upewnij się, że są parami nieizomorficzne.

ZASTOSOWANIE - TWIERDZENIA BORSUKA ORAZ BORSUKA-ULAMA.

TW (Borsuk). Nieparzyste odwzorowanie $f: S^n \to S^n$ (tzn. takie że $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in S^n$) ma nieparzysty stopień

KROK 1: długi ciąg dokładny 2-krotnego nakrycia $p: \tilde{X} \to X$

$$\dots \to H_n(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau_*} H_n(\tilde{X};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} H_n(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X;\mathbb{Z}_2) \to \dots$$

indukowany przez krótki ciąg dokładny

$$0 \to C_n(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} C_n(\tilde{X};\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p\#} C_n(X;\mathbb{Z}_2) \to 0$$

gdzie τ jest homomorfizmem transferu

$$\tau(\sigma) = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$$

gdzie $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ są (wszystkimi) dwoma podniesieniami σ do $\tilde{X}$.

[warto przyglądnąć się naturze homomorfizmów łączących, ale nie musisz pomijamy to]

TO ŻE $P_*=0$ WYMAGA UZASADNIENIA ALE TO SIĘ WYJAŚNIA SAMA DOKŁADNOŚCIĄ

KROK 2: stosujemy powyższy ciąg do nakrycia $S^n \to \mathbb{RP}^n$ (współczynniki $\mathbb{Z}_2$ - pomijamy w zapisie)

$$\overset{0}{\overset{\parallel}{H_{n+1}(\mathbb{RP}^n)}} \xrightarrow[0]{\partial} H_n(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow[\cong]{\tau_*} H_n S^n \xrightarrow[0]{p_*} H_n \mathbb{RP}^n \xrightarrow[\cong]{\partial} H_{n-1}\mathbb{RP}^n \xrightarrow{0} \overset{0}{\overset{\parallel}{H_{n-1}S^n}} \xrightarrow{0}$$

$$\dots \to \overset{0}{\overset{\parallel}{H_i S^n}} \xrightarrow[0]{p_*} H_i \mathbb{RP}^n \xrightarrow[\cong]{\partial} H_{i-1}\mathbb{RP}^n \xrightarrow[0]{\tau_*} \overset{0}{\overset{\parallel}{H_{i-1} S^n}} \to \dots$$

$$\dots \overset{0}{\overset{\parallel}{H_1 S^n}} \xrightarrow[0]{p_*} H_1 \mathbb{RP}^n \xrightarrow[\cong]{\partial} H_0 \mathbb{RP}^n \xrightarrow[0]{\tau_*} H_0 S^n \xrightarrow[\cong]{p_*} H_0 \mathbb{RP}^n \to 0$$

Ponieważ wszystkie niezerowe grupy powyżej to $\mathbb{Z}_2$, więc homomorfizmy są albo zerowe albo izomorfizmami, jak zaznaczono.

[Zatem wszystkie homomorfizmy łączące są w tym wypadku izomorfizmami.]

KROK 3: niepusty odwzorowanie $f: S^n \to S^n$ indukuje odwzorowanie $\bar{f}: \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$

Ponadto, mamy komutujący diagram z udziałem dwóch kopii krótkiego ciągu dokładnego kompleksów łańcuchowych (nad $\mathbb{Z}_2$)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C_i \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\tau} & C_i S^n & \xrightarrow{p_\#} & C_i \mathbb{R}P^n & \to & 0 \\ & & \downarrow \bar{f}_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow \bar{f}_\# & & \\ 0 & \to & C_i \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\tau} & C_i S^n & \xrightarrow{p_\#} & C_i \mathbb{R}P^n & \to & 0 \end{array}$$

[komutowanie dotyczy też brzegowań w kompleksach $C_* S^n$, $C_* \mathbb{R}P^n$]

Prawy kwadrat komutuje, bo $\bar{f}p = pf$

Lewy kwadrat komutuje, bo dla singularnego i-sympleksu $\sigma: \Delta^i \to \mathbb{R}P^n$ który podnosi się do $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 : \Delta^i \to S^n$ podniesieniami dla $\bar{f}\sigma$ są $f\tilde{\sigma}_1, f\tilde{\sigma}_2$

(bo $f(-x) = -f(x)$, a $\tilde{\sigma}_2(y) = -\tilde{\sigma}_1(y)$)

KROK 4: Z naturalności długiego ciągu dokładnego dostajemy komutujący diagram odwzorowań ciągu dokładnego nakrycia $p: S^n \to \mathbb{R}P^n$ w siebie:

$$\begin{array}{ccccccccc} \to & H_i \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\tau_*} & H_i S^n & \xrightarrow{p_*} & H_i \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\partial} & H_{i-1} \mathbb{R}P^n & \to \\ & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow \bar{f}_* & \\ \to & H_i \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\tau_*} & H_i S^n & \xrightarrow{p_*} & H_i \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\partial} & H_{i-1} \mathbb{R}P^n & \to \end{array}$$

KROK 5: wszystkie odwzorowania $\bar{f}_*$ i f_* w tym diagramie są izomorfizmami.

D-d: indukcja 1°. $\bar{f}_*: H_0 \mathbb{R}P^n \to H_0 \mathbb{R}P^n$, $f_*: H_0 S^n \to H_0 S^n$ izo

FAKT POMOCNICZY: Jeśli 3 spośród odwzorowań w komutującym kwadracie

$$\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \to & D \end{array}$$

są izo, to czwarte też.

2°. Krok indukcyjny dla $\bar{f}_*: H_i \mathbb{R}P^n \to H_i \mathbb{R}P^n$

$$\begin{array}{ccc} H_i \mathbb{R}P^n & \xrightarrow[\cong]{\partial} & H_{i-1} \mathbb{R}P^n \\ \downarrow \bar{f}_* & & \bar{f}_* \downarrow \cong \text{ zał. ind.} \\ H_i \mathbb{R}P^n & \xrightarrow[\cong]{\partial} & H_{i-1} \mathbb{R}P^n \end{array}$$

3°. Dla $f_*: H_i S^n \to H_i S^n$, $0<i<n$, nic nie trzeba bo $H_i S^n = 0$.

4°. Dla $f_*: H_n S^n \to H_n S^n$ mamy

$$\begin{array}{ccc} H_n \mathbb{R}P^n & \xrightarrow[\cong]{T_*} & H_n S^n \\ {\scriptstyle [z\,2^\circ]\,\cong}\downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* \\ H_n \mathbb{R}P^n & \xrightarrow[\cong]{T_*} & H_n S^n \end{array} \quad . \ \square$$

KROK 6:

Powyżej mamy że $f_*: H_n(S^n, \mathbb{Z}_2) \to H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$ jest izomorfizmem. Wcześniej widzieliśmy że jest to homomorfizm $f_*: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ zadany przez m-krotność, gdzie $m = \deg(f)$.

m-krotność jest izomorfizmem $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ iff m nieparzyste. $\square$

WNIOSEK (Tw Borsuka-Ulama)

Dla dowolnego $g: S^n \to \mathbb{R}^n$ istnieje $x \in S^n$ t.że $g(x) = g(-x)$.

D-d

Niech $f(x) := g(x) - g(-x)$. Wtedy $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ jest nieparzyste $[f(-x) = -f(x)]$.

Potrzebujemy pokazać, że $f(x) = 0$ dla pewnego $x \in S^n$.

Jeśli nie, możemy zastąpić $f(x)$ przez $f(x)/|f(x)|$ i dostaniemy nowe $f: S^n \to S^{n-1}$ - dalej nieparzyste.

Obcięcie tego f do równikowego $S^{n-1} \subset S^n$ jest nieparzystym odwzorowaniem $S^{n-1} \to S^{n-1}$.

Z Tw. Borsuka, to obcięcie ma stopień nieparzysty, jest więc homotopijnie nietrywialne.

Ale będąc obcięciem odwzorowania $S^n \to S^{n-1}$, jest homotopijnie trywialne — SPRZECZNOŚĆ. $\square$