APROKSYMACJA SYMPLICJALNA I TW. LEFSCHETZA

Def. Dla homomorfizmu $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$, zadanego macierzą $[a_{ij}]$, śladem φ nazywamy liczbę

$$\operatorname{tr} \varphi := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Ponieważ $\operatorname{tr}([a_{ij}][b_{ij}]) = \operatorname{tr}([b_{ij}][a_{ij}])$, ślad jest też niezmienniczy względem sprzężenia przez macierze odwracalne nad $\mathbb{Z}$

$$\left[\text{bo } \operatorname{tr}\left([b_{ij}][a_{ij}][b_{ij}]^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left([a_{ij}][b_{ij}]^{-1}[b_{ij}] = [a_{ij}]\right)\right]$$

więc nie zależy od wyboru bazy w $\mathbb{Z}^n$, tylko od φ.

Def. Dla sk. gen. abelowej A, śladem homomorfizmu $\varphi : A \to A$ nazywamy ślad stowarzyszonego $\bar{\varphi} : A/\operatorname{Tor}(A) \to A/\operatorname{Tor}(A)$

Def. Niech X - skończony CW-kompleks, lub inna przestrzeń topologiczna t. że grupy homologii $H_n X$ znikają dla dostatecznie dużych n, i są skończenie generowalne.

Dla dowolnego ciągłego $f : X \to X$ określamy liczbę Lefschetz'a dla f:

$$\tau(f) := \sum_n (-1)^n \operatorname{tr}\left[f_* : H_n X \to H_n X\right].$$

PRZYKŁAD. Ponieważ dla dowolnej skończenie generowanej grupy abelowej A mamy $\operatorname{tr}(id_A) = \operatorname{rank}(A)$, dla odwzorowania identycznościowego $id_X : X \to X$ mamy

$$\tau(id_X) = \sum_n (-1)^n \operatorname{tr}(id_{H_n X}) = \sum_n (-1)^n \operatorname{rank}(H_n X) = \chi(X).$$

TWIERDZENIE (LEFSCHETZ).
Jeśli X jest skończonym kompleksem symplicjalnym [lub ogólniej, retraktem skończonego kompleksu symplicjalnego] zaś $f : X \to X$ jest odwzorowaniem z liczbą Lefschetza $\tau(f) \neq 0$, to f ma punkt stały.

PRZYKŁADY

(1) uogólnienie tw. Brouwera:

jeśli X jest drogowo spójne przestrzenią, i jeśli rank $H_iX = 0$ dla $i>0$, to dla dowolnego $f: X \to X$

mamy $tr[f_*: H_0X \to H_0X] = 1$ oraz $tr[f_*: H_iX \to H_iX] = 0$ dla $i>0$

a więc $\tau(f) = 1 \neq 0$.

Zatem f ma punkt stały.

(1') Uwaga (1) stosuje się np do wszystkich przestrzeni ściągalnych do punktu

Ale UWAGA! Założenie, że X jest retraktem skończonego kompleksu symplicjalnego (implikujące np. że X jest zwarte) jest istotne! Dla $X = \mathbb{R}$ twierdzenie nie działa!

(1'') Dla przestrzeni rzutowej $\mathbb{RP}^n$ mamy

$$C_*\mathbb{RP}^n: \quad 0 \to \overset{\boxed{i=n}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{1+(-1)^n} \mathbb{Z} \to \dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \overset{\boxed{i=1}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \overset{\boxed{i=0}}{\mathbb{Z}} \to 0$$

$$H_*\mathbb{RP}^n: \quad \begin{array}{llllll} n=2k - & \mathbb{Z} & \dots & \mathbb{Z}_2 & 0 \quad \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z} \\ n=2k+1 & 0 & & & & \end{array}$$

Jeśli więc $n=2k$, to $\mathbb{RP}^n$ podpada pod (1), i każdy $f: \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$ ma punkt stały.

(Ładnie koresponduje to z faktem, że każde liniowe $F: \mathbb{R}^{2k+1} \to \mathbb{R}^{2k+1}$ ma wektor własny.)

(2) Dla $f: S^n \to S^n$, $\tau(f) = 1 + (-1)^n \deg(f)$.

Jeśli więc $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$, to f ma punkt stały.

UWAGA. Dla $n = 2k+1$ łatwo wskazać $f: S^n \to S^n$ stopnia 1 bez punktów stałych.

Dla $n = 2k$ odwzorowanie antypodyczne $a: S^n \to S^n$ jest stopnia -1

(3) Dla drogowo spójnej X jak w twierdzeniu,
dowolne ściągalne do punktu $f: X \to X$ ma punkt stały.

(4) Można pokazać, że jeśli X jest skończonym CW-kompleksem, to X spełnia założenie twierdzenia.
Jeśli więc ponadto $\chi(X) \neq 0$, to dowolne $f: X \to X$ homotopijne z id_X ma punkt stały.

UWAGA. Gdy $\chi(X) = 0$, to na ogół tak nie jest.
Np. $X = S^1$ i f = niezerowy obrót.

[o aproksymacji symplicjalnej]

TW. Niech K, L - kompleksy symplicjalne, K skończony, L - dowolny. Wówczas dowolne ciągłe $f: K \to L$ jest homotopijne z odwzorowaniem, które jest symplicjalne względem któregoś iterowanego barycentrycznego podrozbicia K.

UWAGI. ① Krotność niezbędnego iterowanego podrozbicia może być dowolnie duża. Np. gdy $|K| \cong |L| \cong S^n$, to przy ustalonym q istnieje skończenie wiele symplicjalnych $\varphi: K^{[q]} \to L$, zaś ciągłych $f: K \to L$ jest z dokł. do homotopii nieskończenie wiele [każda liczba całkowita może być stopniem].

② Podrozbijanie L byłoby niewystarczające.

Np. gdy $|K| = |L| = S^n$,

dla dużych q symplicjalne $\varphi: K \to L^{[q]}$

nie może być surjekcją, więc ma stopień 0.
(jest homotopijne ze stałym) -(ściągalne do punktu).

Dla mniejszych q mamy skończenie wiele symplicjalnych $\varphi: K \to L^{[q]}$. Stąd, podrozbijanie L umożliwia tylko skończenie wiele stopni.

Def. Otwarta gwiazda $\operatorname{st}\sigma = \operatorname{st}(\sigma, X)$ w kompleksie symplicjalnym X to suma wnętrz tych sympleksów τ z X, które zawierają σ. Jest to otwarty zbiór w X.

LEMAT. Niech $v_1, .., v_k$ wierzchołki kompleksu symplicjalnego X. Wówczas $\operatorname{st} v_1 \cap \dots \cap \operatorname{st} v_k \neq \emptyset \iff v_1, .., v_k$ zawierają się w pojedynczym sympleksie z X. Ponadto, w takiej sytuacji, jeśli $\sigma = \operatorname{span}(v_1, .., v_k)$, to $\operatorname{st} v_1 \cap \dots \cap \operatorname{st} v_k = \operatorname{st}\sigma$.

Dowód lematu

Wnętrze sympleksów w X są parami rozłączne, i każdy $st\,\sigma_i$ jest sumą pewnych spośród nich. Zatem $st\,\sigma_1 \cap \dots \cap st\,\sigma_k \neq \emptyset$

$\iff$ $st\,\sigma_1 \cap \dots \cap st\,\sigma_k$ zawiera wnętrze $\mathrm{int}(\sigma)$ pewnego σ

$\iff$ $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ zawierają się w pewnym σ.

Jeśli $\sigma = \mathrm{span}[\sigma_1, \dots, \sigma_k]$, to

$st\,\sigma_1 \cap \dots \cap st\,\sigma_k$ = suma wnętrz tych τ, które zawierają wszystkie σ_i

= suma wnętrz tych τ które zawierają σ

= $st\,\sigma$. $\square$

Def. Domknięta gwiazda $\mathrm{St}\,\sigma = \mathrm{St}(\sigma, X)$ to suma wszystkich sympleksów τ w X zawierających σ.

DOWÓD TW. O APROKSYMACJI SYMPLICJALNEJ.

Rodzina $\{st\, w : w \in Vert(L)\}$ stanowi otwarte pokrycie L.

Zatem rodzina $f^{-1}(st\, w) : w \in Vert(L)$

stanowi otwarte pokrycie K.

Rozważmy dowolną metrykę na K, która jest standardową euklidesową po obcięciu do dowolnego sympleksu w K

(np. zanurzamy K symplicjalnie w odpowiednio wymiarowy sympleks Δ^N, bierzemy standardową euklidesową metrykę w Δ^N, i obcinamy do K).

Niech ε będzie liczbą Lebesgue'a dla pokrycia

$f^{-1}(st\, w) : w \in Vert\, L$.

Rozważmy na tyle krotne iterowane barycentryczne podrozbicie $K^{[q]}$, że każdy sympleks $K^{[q]}$ ma średnicę mniejszą niż $\varepsilon/2$.

Wówczas dowolna gwiazda $St\, v$ dowolnego wierzchołka w $K^{[q]}$ ma średnicę $< \varepsilon$, i dlatego

możemy wybrać wierzchołek $g(v) \in L^{(0)}$ t.że $St(v) \subset f^{-1}(st\, g(v))$

a więc

$f(St\, v) \subset st\, g(v)$.

Pokażmy, że tak określone $g : (K^{[q]})^{(0)} \to L^{(0)}$ rozszerza się do odwzorowania symplicjalnego $g : K^{[q]} \to L$.

Niech $[v_1, \dots, v_k]$ - sympleks w $K^{[q]}$, i niech x będzie punktem z wnętrza $[v_1, \dots, v_k]$. Wtedy

$f(x) \in f(St\, v_1) \cap \dots \cap f(St\, v_k) \subset st\, g(v_1) \cap \dots \cap st\, g(v_k)$, a więc

$\operatorname{st} g(v_1) \cap \dots \cap \operatorname{st} g(v_k) \neq \emptyset$, czyli

$g(v_1), \dots, g(v_k)$ wspinają sympleks w L.

Pozostaje pokazać, że f jest homotopijne z g.

Pokażmy najpierw, że dla dowolnego x $f(x)$ i $g(x)$ leżą w pewnym wspólnym sympleksie w L.

Załóżmy, że $x \in \operatorname{int} [v_1, \dots, v_k]$. Wtedy, jak pokazaliśmy wyżej,

$g(x) \in [g(v_1), \dots, g(v_k)]$, natomiast

$f(x) \in \operatorname{st} g(v_1) \cap \dots \cap \operatorname{st} g(v_k) = \operatorname{st} [g(v_1), \dots, g(v_k)]$

Stąd obie $f(x)$ i $g(x)$ leżą w pewnym sympleksie τ zawierającym $[g(v_1), \dots, g(v_k)]$.

Skoro tak, to możemy poprawnie zdefiniować liniową homotopię

$(1-t) f(x) + t \cdot g(x)$, $0 \leq t \leq 1$ pomiędzy f i g. $\square$

[ciągłość wystarczy sprawdzić na obcięciu do dowolnego $\sigma \times [0,1]$,

$\sigma = [v_1, \dots, v_k]$, a tam $f(x) \in \operatorname{st} [g(v_1), \dots, g(v_k)]$

$g(x) \in [g(v_1), \dots, g(v_k)]$

$\operatorname{St} [g(v_1), \dots, g(v_k)] \times [g(v_1), \dots, g(v_k)] \times [0,1] \to \operatorname{St} [g(v_1), \dots, g(v_k)]$

ciągłe

UWAGA. Udowodniliśmy nieco mocniejszy:

FAKT. K, L symplicjalne, K - skończony, $f: K \to L$ ciągłe. Istnieje $q \geq 0$ oraz symplicjalne $g: K^{[q]} \to L$ homotopijne z f i takie, że dla dowolnego sympleksu σ, $f(\sigma) \subset st\, g(\sigma)$.

D-d

Jeśli $\sigma = [v_1, \ldots, v_k]$ to $\sigma \subset St(v_1) \cap \cdots \cap St(v_k)$,

$$f(\sigma) \subset f(St\, v_1) \cap \cdots \cap f(St(v_k)) \subset st\, g(v_1) \cap \cdots \cap st\, g(v_k) =$$

$$= st\; g(\sigma) \qquad \square$$

LEMAT 1. Jeśli A, B, C są skończenie generowane i jeśli

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "p"] & B \arrow[r, "q"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

jest komutującym diagramem z dokładnymi rzędami, to

$$\operatorname{tr}\beta = \operatorname{tr}\alpha + \operatorname{tr}\gamma .$$

[ĆW/ZAD.]

LEMAT 2. X - skończony CW-kompleks, $\dim X = n$, $f : X \to X$ komórkowe.

Wówczas $$\tau(f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{tr}\left[f_{\#}^{CW} : C_i^{CW} X \to C_i^{CW} X \right].$$

[ślady odwzorowań na poziomie łańcuchów!]

D-d Lematu 2

8

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Z_i & \to & C_i & \to & B_{i-1} & \to & 0 \\ & & \downarrow f_{\#,B_i} & & \downarrow f_{\#,C_i} & & \downarrow f_{\#,Z_{i-1}} & & \\ 0 & \to & Z_i & \to & C_i & \to & B_{i-1} & \to & 0 \end{array}$$

$$tr(f_{\#,Z_i}) = tr(f_{\#,C_i}) - tr(f_{\#,B_{i-1}})$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B_i & \to & Z_i & \to & H_i & \to & 0 \\ & & \downarrow f_{\#,B_i} & & \downarrow f_{\#,Z} & & \downarrow f_{*,H_i} & & \\ 0 & \to & B_i & \to & Z_i & \to & H_i & \to & 0 \end{array}$$

Stąd $tr(f_{\#,C_i}) = tr(f_{\#,Z_i}) + tr(f_{\#,B_{i-1}})$

KONWENCJA. $tr(f_{\#,B_{-1}}) = 0$

a także

$$tr(f_{*,H_i}) = tr(f_{\#,Z_i}) - tr(f_{\#,B_i})$$

Zatem: $tr(f_{*,H_i}) = tr(f_{\#,C_i}) - tr(f_{\#,B_{i-1}}) - tr(f_{\#,B_i})$

$$T(f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n tr(f_{*,H_i}) =$$

bo $B_n^{BCW} = 0$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^n tr(f_{\#,C_i}) - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{tr(f_{\#,B_{-1}})}} + (-1)^n \underset{0}{\underset{\shortparallel}{tr(f_{\#,B_n})}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1) \, tr(f_{\#,C_i}) \, . \; \square$$

DOWÓD TW. LEFSCHETZA

Zał. że $f: X \to X$ nie ma punktu stałego.

- Twierdzę, że istnieje podrozbicie L dla X, dalsze podrozbicie K w L, i symplicjalne odwzorowanie $g: K \to L$ homotopijne z f i takie, że $g(\sigma) \cap \sigma = \emptyset$ dla dowolnego sympleksu σ w K.

Aby to udowodnić, rozważmy metrykę d w K, która jest standardowa po obcięciu do dowolnego sympleksu w K.

Ze zwartości K, istnieje $\varepsilon > 0$ t.że $\forall x \in K$ mamy $d(x, f(x)) > \varepsilon$. Niech L będzie takim podrozbiciem X, że gwiazdy wierzchołków mają średnice $< \varepsilon/2$.

Istnieje podrozbicie K dla L i symplicjalne $g: K \to L$ homotopijne z f t.że $f(\sigma) \subset St\, g(\sigma)$ dla dowolnego sympleksu σ w K.

Dla dowolnego sympleksu σ w K mamy

- $\operatorname{diam} \sigma < \varepsilon/2$ (bo σ zawiera się w sympleksie w L, a ten w swojej gwieździe)
- $\operatorname{diam}(St\, g(\sigma)) < \varepsilon/2$ (bo $St\, g(\sigma) \subset St\, v$ dla dowolnego v z $g(\sigma)$)
- dla $x \in \sigma$, $f(x) \in St\, g(\sigma)$, ale $d(x, f(x)) > \varepsilon$.

Zatem $\sigma \cap St\, g(\sigma) \neq \emptyset$, więc tym bardziej $\sigma \cap g(\sigma) = \emptyset$. □

Potraktujmy K jako CW-kompleks, zaś $g: K \to L$ jako odwzorowanie komórkowe $K \to K$. W istocie, dla dowolnego k mamy $g(K^{(k)}) \subset L^{(k)} \subset K^{(k)}$ – stąd komórkowość.

Chcemy pokazać, że liczba Lefschetza $\tau(g)$ [równa $\tau(f)$ z homotopijności g z f] jest $= 0$.

Przypomnijmy, że

$$\tau(g) = \sum_{i=0}^{\dim K} (-1)^i \operatorname{tr} \left[g_{\#}^{CW} : C_i^{KW} K \to C_i^{CW} K \right]$$

oraz, że $C_i^{CW} K = H_i(K^{(i)}, K^{(i-1)})$, zaś

$g_{\#}^{CW} : C_i^{CW} K \to C_i^{CW} K$ to po prostu

$g_* : H_i(K^{(i)}, K^{(i-1)}) \to H_i(K^{(i)}, K^{(i-1)})$.

Ponieważ dla dowolnej komórki/sympleksu i-wymiarowej σ mamy $g(\sigma) \cap \sigma = \phi$, Odwzorowanie g_* ma w standardowej bazie dla $H_i(K^{(i)}, K^{(i-1)})$ same zera na przekątnej (współczynniki $n_{\sigma\sigma} = 0$). Zatem dla każdego i

$$\operatorname{tr} \left[g_* : H_i(K^{(i)}, K^{(i-1)}) \to H_i(K^{(i)}, K^{(i-1)}) \right] = 0$$

czyli $\operatorname{tr} \left[g_{\#}^{CW} : C_i^{CW} K \to C_i^{CW} K \right] = 0$.

Stąd $\tau(g) = 0$. $\square$