NATURALNOŚĆ DŁUGIEGO CIĄGU DOKŁADNEGO

(1) Dla par przestrzeni

Niech $f: (X,A) \to (Y,B)$ ciągłe. Mamy wtedy:

$$f: (X,A) \to (Y,B) \rightsquigarrow f_*: H_n(X,A) \to H_n(Y,B) \quad \forall n$$

$$f: X \to Y \rightsquigarrow f_*: H_n X \to H_n Y \quad \forall n$$

$$f: A \to B \rightsquigarrow f_*: H_n A \to H_n B \quad \forall n$$

FAKT. Następujący diagram (którego wiersze są ciągami dokładnymi par) komutuje:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_n A \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "1"] & H_n X \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "2"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "3"] & H_{n-1} A \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_n B \arrow[r, "i_*"] & H_n Y \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1} B \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

DOWÓD:

- Kwadraty typu (1) komutują, bo mamy równość złożeń:

$$f \circ i : A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$$
$$\parallel$$
$$i \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i} Y$$

• Kwadraty typu (2) komutują, bo mamy utożsamienie

$$H_n X = H_n(X,\emptyset) \quad \text{- gdzie } C_n(X,\emptyset) = C_nX/1 = C_nX$$
$$(C_n\emptyset = 1).$$

oraz mamy równość złożeń dla par

$$f\circ j : (X,\emptyset) \xrightarrow{j} (X,A) \xrightarrow{f} (Y,B)$$
$$\parallel$$
$$j\circ f : (X,\emptyset) \xrightarrow{f} (Y,\emptyset) \xrightarrow{j} (Y,B)$$

• Dla dowodu komutowania kwadratów typu (3)

rozważmy dowolną klasę homologii $a \in H_n(X,A)$

i niech $a = [c]$ gdzie c jest cyklem relatywnym,

czyli $c \in C_nX$, $\partial c \in C_nA$

Wówczas mamy:

$$f_*(a) = f_*([c]) = [f_\#(c)] \in H_n(Y,B)$$
$$\partial(a) = \partial([c]) = [\partial c] \in H_{n-1}A$$

Stąd mamy

$$f_*\partial(a) = f_*\partial([c]) = f_*([\partial c]) = [f_\#\partial c] =$$
$$= [\partial f_\# c] = \partial([f_\# c]) = \partial f_*([c]) = \partial f_*(a)$$

czyli komutowanie kwadratu (3). $\square$

II W pełnej ogólności algebraicznej

Komutujący diagram dwóch krótkich ciągów dokładnych kompleksów łańcuchowych

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_* \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & B_* \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"] & C_* \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_* \arrow[r, "i'"] & B'_* \arrow[r, "j'"] & C'_* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(gdzie α, β, γ oraz i, j, i', j' to odwzorowania łańcuchowe)

indukuje komutujący diagram długich ciągów dokładnych homologii

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H_n A \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_n B \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & H_n C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{n-1} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & {} \\
\arrow[r] & H_n A' \arrow[r, "i'_*"] & H_n B' \arrow[r, "j'_*"] & H_n C' \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1} A' \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

□ ĆWICZENIE!

III PRZYKŁAD

$$A \subset U \subset X, \quad B \subset V \subset Y$$

$f : (X, U, A) \to (Y, V, B)$ ciągłe $(f(U) \subset V,\ f(A) \subset B)$

Mamy wtedy

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_*(U,A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_\#"] & C_*(X,A) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_\#"] & C_*(X,U) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*(V,B) \arrow[r] & C_*(Y,B) \arrow[r] & C_*(Y,V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Komutujący diagram kompleksów łańcuchowych i odwzorowań łańcuchowych, z wierszami będącymi krótkimi ciągami dokładnymi.

Stąd dostajemy komutujący diagram z długich ciągów dokładnych trójek:

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H_n(U,A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,U) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(U,A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & {} \\
\arrow[r] & H_n(V,B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,V) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(V,B) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

(naturalność ciągu dokładnego trójek) $\square$

DOBRE PARY I ILORAZY

Def. (X,A) jest <u>dobrą parą</u> jeśli A jest niepusty, domknięty, oraz istnieje otwarte otoczenie U zbioru A w X posiadające deformacyjną retrakcję na A.

PRZYKŁADY: $(D^n, \partial D^n = S^{n-1})$, (CW-kompleks, CW-podkompleks).

FAKT. Jeśli (X,A) jest dobrą parą, to odwzorowanie ilorazowe $q: X \to X/A$ indukuje izomorfizm homologii

$$q_*: H_n(X,A) \longrightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

dla wszystkich $n \geq 0$.

Dowód:
Niech $V \subset X$ otwarte otoczenie A posiadające def. retrakcję na A.

Odwzorowanie ilorazowe $q: X \to X/A$ indukuje następujące odwzorowanie, które też oznaczamy przez q:

$$q: (X,A) \to (X/A, A/A)$$ – to odwzorowanie indukuje izomorfizm homologii z tezy

$$q: (X,V) \to (X/A, V/A)$$

$$q: (X-A, V-A) \to (X/A - A/A, V/A - A/A)$$

to jest w istocie homeomorfizm par

Mamy następujący komutujący diagram:

$$(\#)\qquad \begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[r, "j_*", "\cong"'] \arrow[d, "q_*"] \arrow[dr, phantom, "\text{(A)}"] & H_n(X,V) \arrow[d, "q_*"] \arrow[dr, phantom, "\text{(B)}"] & H_n(X-A, V-A) \arrow[l, "i_* - \text{izo}"', "\text{[wycinanie]}"] \arrow[d, "q_* - \text{izomorfizm, bo obcięcie } q \text{ jest homeo}"] \\
H_n(X/A, A/A) \arrow[r, "j_*", "\cong"'] & H_n(X/A, V/A) & H_n(X/A - A/A, V/A - A/A) \arrow[l, "i_* - \text{izo}"', "\text{[wycinanie]}"]
\end{tikzcd}$$

Kwadrat (A) komutuje z naturalności ciągów dokładnych dla trójek (X,V,A) oraz $(X/A, V/A, A/A)$, względem odwzorowania $q : (X,V,A) \to (X/A, V/A, A/A)$.

Kwadrat (B) komutuje ze względu na równość złożeń

$$i \circ q : (X-A, V-A) \xrightarrow{q} (X/A - A/A, V/A - A/A) \xrightarrow{i} (X/A, V/A)$$
$$\parallel$$
$$q \circ i : (X-A, V-A) \xrightarrow{i} (X,V) \xrightarrow{q} (X/A, V/A).$$

Z ciągu dokładnego trójki (X,V,A) mamy fragment

$$H_n(V,A) \to H_n(X,A) \xrightarrow{j_*} H_n(X,V) \to H_{n-1}(V,A)$$

zaś z deformacyjnej retrakcji $V \to A$ mamy $H_*(V,A) = 0$

Stąd dokładność $0 \to H_n(X,A) \xrightarrow{j_*} H_n(X,V) \to 0$

skąd wynika że j_* jest izomorfizmem.

Podobnie, z deformacyjnej retrakcji $V/A \to A/A$, uzasadnia się, że $j_* : H_n(X/A, A/A) \to H_n(X/A, V/A)$ jest izomorfizmem.

Nasza teza, czyli fakt że lewe odwzorowanie q_* w diagramie (#) jest izomorfizmem, wynika z dwukrotnego zastosowania obserwacji, że jeśli w komutującym diagramie

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "\delta"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "\gamma"] & D \end{tikzcd}$$

α, β, γ są izomorfizmami to δ też jest izomorfizmem. $\square$

Wyliczenie grup $H_k S^n$ homologii sfer

CO WIEMY?

$H_0 S^n \cong \mathbb{Z}$ dla $n \geq 1$

$H_0 S^0 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$H_k S^0 \cong 0$ dla $k \geq 1$

Mając na uwadze, że $S^n = \partial D^{n+1} \subset D^{n+1}$, skorzystamy z:

- ciągu dokładnego pary (D^{n+1}, S^n)
- faktu, że (D^{n+1}, S^n) jest dobrą parą, oraz że $D^{n+1}/S^n \cong S^{n+1}$ dla $n \geq 0$.

Mamy ciąg dokładny:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{k+1} D^{n+1} & \longrightarrow & H_{k+1}(D^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{\partial} & H_k S^n & \longrightarrow & H_k D^{n+1} \\ \| & & & & & & \| \text{ dla } k \geq 1 \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

WNIOSEK. $\forall k \geq 1$

$$H_k S^n \cong H_{k+1}(D^{n+1}, S^n) \underset{\text{bo dobra para}}{\cong} \widetilde{H}_{k+1}(D^{n+1}/S^n) \cong \widetilde{H}_{k+1} S^{n+1} \cong H_{k+1} S^{k+1}!$$

Wiemy, że $H_k S^0 = 0$ dla $k \geq 1$. Stąd i z WNIOSKU:

dla $k > n$ mamy $H_k S^n = 0$. $\square$

INNY WNIOSEK Z POWYŻSZEGO CIĄGU DOKŁADNEGO:
dla $k \geq 1$ homomorfizm dołączony $\partial : H_{k+1}(D^{n+1}, S^n) \to H_k S^n$ jest izomorfizmem (najciekawsze jest to dla $k = n$).

Dla $n \geq 1$ mamy też ciąg dokładny

$$\begin{tikzcd}
H_1 D^{n+1} \arrow[r, "0"] & H_1(D^{n+1},S^n) \arrow[r, "\partial", "0"'] & H_0 S^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0 D^{n+1} \arrow[d, equal] \\
0 & & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Stąd $H_1(D^{n+1}, S^n) = 0$ dla $n \geq 1$

Mamy więc wtedy, dla $n \geq 1$;

$$H_1 S^{n+1} \cong \tilde{H}_1 S^{n+1} \cong \tilde{H}_1(D^{n+1}/S^n) \cong H_1(D^{n+1}, S^n) = 0$$

WNIOSEK. Dla $1 \leq k < n$ mamy $H_k S^n = 0$. $\square$

Mamy też ciąg dokładny

$$\begin{tikzcd}
H_1 D^1 \arrow[r, "0"] & H_1(D^1,S^0) \arrow[r, "\partial"] & H_0 S^0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0 D^1 \arrow[d, equal] \\
0 & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "+", "\ker \cong \mathbb{Z}"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Zatem $H_1(D^1, S^0) \cong \mathbb{Z}$

czyli też $H_1 S^1 \cong \tilde{H}_1 S^1 \cong \tilde{H}_1(D^1/S^0) \cong H_1(D^1, S^0) \cong \mathbb{Z}$.

WNIOSEK. $H_k S^k \cong \mathbb{Z}$ dla $k \geq 1$. $\square$

WNIOSEK. Dla $n \geq 1$

$$H_i S^n = H_i(D^n, \partial D^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{dla } i = n \\ 0 & \text{dla } i \neq n \end{cases}. \quad \square$$

(2) LOKALNE GRUPY HOMOLOGII.

TWIERDZENIE. Jeśli niepuste otwarte zbiory $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ są homeomorficzne, to $m=n$.

dowód: dla $x \in U$, z wycięcia, mamy $H_k(U, U-\{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m-\{x\})$.

Z długiego ciągu dokładnego pary $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m-\{x\})$ dla homol. zred. mamy

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m-\{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m-\{x\})$$

Z deformacyjnej retrakcji $\mathbb{R}^m-\{x\}$ na S^{m-1} mamy $\tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m-\{x\}) = \tilde{H}_{k-1} S^{m-1} =$

$$= \begin{cases} \mathbb{Z} & k=m \\ 0 & k\neq m \end{cases}$$

Zatem

$$H_k(U, U-\{x\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k=m \\ 0 & k\neq m \end{cases}$$

Po tym odróżniamy U od V gdy $m \neq n$. □

DEF. Lokalne grupy homologii X w x to $H_*(X, X-\{x\})$.

* Z wycięcia, $H_*(X, X-\{x\}) = H_*(U, U-\{x\})$ dla dowolnego otwartego otoczenia U punktu x, stąd nazwa.

* homeo $f: X \to Y$ indukuje izomorfizm grup lokalnych
  $H_*(X, X-\{x\}) \to H_*(Y, Y-\{f(x)\}) \quad \forall x$

* Lokalne grupy homologii mogą rozróżniać
  - przestrzenie z dokładnością do homeomorfizmu
  - punkty przestrzeni należące do różnych orbit pod działaniem grupy Homeo(X) wszystkich homeomorfizmów

PRZYKŁAD. $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n \geq 0\}$, $\partial\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n = 0\}$.
Nie istnieje homeomorfizm $f: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ który punkt $x \in \partial\mathbb{R}^n_+$ przeprowadza na punkt $y \notin \partial\mathbb{R}^n_+$, i na odwrót też.
Dla $x \in \partial\mathbb{R}^n_+$, mamy

$$H_k(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+-\{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n_+-\{x\}) = \tilde{H}_{k-1} D^{n-1} = 0 \quad \forall k.$$

STOPIEŃ ODWZOROWAŃ $S^n \to S^n$

[Brouwer, 1910-12, zanim powstała rygorystyczna teoria homologii innymi metodami (symplicjalna aproksymacja)]

[Istnieje też podejście topologiczno-różniczkowe, korzystające z możliwości aproksymacji odwzorowań ciągłych różniczkowalnymi]

DEF. Stopniem odwzorowania ciągłego $f: S^n \to S^n$ nazywamy liczbę całkowitą $d = \deg(f)$ taką, że $f_*(\alpha) = d \cdot \alpha \quad \forall \alpha \in H_n S^n$.

UWAGA. Każdy homomorfizm $\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{H_n S^n}} \to H_n S^n$ jest postaci $\alpha \mapsto d \cdot \alpha$.

WŁASNOŚCI.

(a) $\deg(\mathrm{id}_{S^n}) = 1$, bo $(\mathrm{id}_{S^n})_* = \mathrm{id}_{H_n S^n}$.

(b) Jeśli f nie jest surjekcją, to $\deg(f) = 0$.

d-d: Jeśli $x_0 \notin f(S^n)$ to

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & S^n \\ & S^n - \{x_0\} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

, czyli $f_* = i_* (f_1)_*$

Ale $H_n(S^n - \{x_0\}) = 0$, więc $(f_1)_*$ jest zerowy, czyli f_* zerowy. □

(c) Homotopijne $f, g : S^n \to S^n$ mają równe stopnie, bo $f_* = g_*$.

UWAGA: Stwierdzenie odwrotne jest też prawdziwe:

jeśli $\deg(f) = \deg(g)$ dla $f, g : S^n \to S^n$ to $f \sim g$

(jest to twierdzenie Hopfa z roku 1925).

(d) $\deg(f\circ g) = \deg(f)\cdot\deg(g)$, bo $(f\circ g)_* = f_* \circ g_*$.

(d') Jeśli $f: S^n \to S^n$ jest homotopijną równoważnością (np. homeo), to $\deg(f) = \pm 1$.

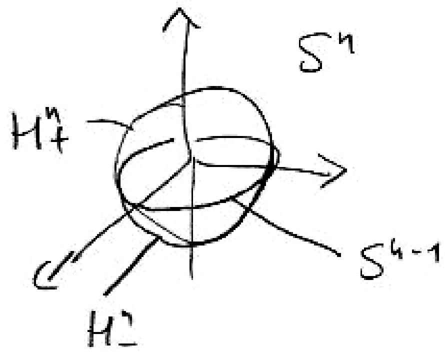
d-d: jeśli g - homotopijna odwrotność, to $f\circ g \sim id_{S^n}$, czyli

$$\deg(f)\cdot\deg(g) = \deg(f\circ g) = 1 \quad . \ \square$$

(e)

$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$S^{n-1} \subset S^n$, $S^{n-1} = S^n \cap [\mathbb{R}^n \times \{0\}]$



$H^n_+ = \{x \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$

$H^n_- = \{x \in S^n : x_{n+1} \leq 0\}$

$r : S^n \to S^n$ – odbicie względem S^{n-1}

$$r(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$$

Niech $\sigma : \Delta^n \to S^n$ – dowolny homeomorfizm na H^n_+.

Wówczas $\sigma - r \circ \sigma \in C_n S^n$ jest cyklem.

Ćw. Klasa homologii $[\sigma - r\circ\sigma] \in H_n S^n \cong \mathbb{Z}$ jest generatorem tej grupy homologii (w szczególności, jest niezerowym elementem). □

Dla odwzorowania $r_\# : C_n S^n \to C_n S^n$ mamy

$$r_\#(\sigma - r\circ\sigma) = r\circ\sigma - r\circ r\circ\sigma = r\circ\sigma - \sigma = -(\sigma - r\circ\sigma).$$

Stąd $r_*([\sigma - r\circ\sigma]) = -[\sigma - r\circ\sigma]$

WNIOSEK. $\deg(r) = -1$. □

(f) Odwzorowanie antypodyczne $-id: S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$, ma stopień $(-1)^{n+1}$, gdyż jest złożeniem $n+1$ odbić w podprzestrzeniach prostopadłych do poszczególnych osi w $\mathbb{R}^{n+1}$.

(g) Jeśli $f: S^n \to S^n$ nie ma punktu stałego, to $\deg(f) = (-1)^{n+1}$, bo wtedy $f \sim -id$.

ZASTOSOWANIA:

(1) TWIERDZENIE: Jeśli n jest parzyste, to na sferze S^n nie istnieje ciągłe niezerowe pole wektorów stycznych.

d-d: Takie pole wektorowe zadawałoby homotopię pomiędzy id oraz $-id$. W tych wymiarach $\deg(id) = 1$, $\deg(-id) = (-1)^{n+1} = -1$, więc jest to niemożliwe. □

(2) TWIERDZENIE. Jedyna nietrywialna grupa, która dopuszcza wolne działanie (za pomocą homeomorfizmów) na sferze S^n parzystego wymiaru to $\mathbb{Z}_2$.

UWAGA. $\mathbb{Z}_2$ działa wolno np. przez antypodyzm.

Dowód: działanie G na S^n to przyporządkowanie każdemu $g \in G$ homeomorfizmu $h_g: S^n \to S^n$ takich, że $h_{g_1} \circ h_{g_2} = h_{g_1 g_2}$.

Mamy $\deg(h_g) = \pm 1$ $\forall g$.

Ponadto $g \mapsto \deg(h_g)$ określa homomorfizm $\varphi: G \to \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$.

Dla $g \neq e$ h_g nie ma punktu stałego, bo działanie jest wolne. Z własności (g).

Zatem $\varphi(g) = -1$ $\forall g \in G \setminus \{e\}$, z

Mamy więc $\operatorname{Ker} \varphi = \{e\}$, a zatem $G \subset \mathbb{Z}_2$. □