STOPIEŃ LOKALNY (W PUNKCIE) I WYLICZANIE STOPNIA

$f: S^n \to S^n$, $y \in S^n$, zał. że $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\} \subset S^n$

Dla każdego x_i niech U_i otoczenie x_i rozłączne z pozostałymi x_j

Wtedy $f|U_i : (U_i, U_i - \{x_i\}) \to (S^n, S^n - \{y\})$

$$\begin{tikzcd}
H_n(U_i, U_i - \{x_i\}) \arrow[r, "(f|U_i)_*"] \arrow[d, phantom, "\cong \text{ wycinanie}"] & H_n(S^n, S^n - \{y\}) \arrow[d, phantom, "\cong \text{ ciąg pary}"] \\
H_n(S^n, S^n - \{x_i\}) \arrow[d, phantom, "\cong \text{ ciąg pary}"] & H_n S^n = \mathbb{Z} \\
H_n S^n = \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

$(f|U_i)_*$ jest mnożeniem przez pewną liczbę całkowitą d_i

DEFINICJA. d_i j.w. nazywamy <u>stopniem</u> f <u>w punkcie</u> x_i; ozn $\deg(f|x_i)$.

- nie zależy od wyboru dostatecznie małego U_i [wyjaśnić]

PRZYKŁAD. Jeśli $f|U_i : U_i \to f(U_i)$ jest homeo, to

$$(f|U_i)_* : H_n(U_i, U_i - \{x_i\}) \to H_n(S^n, S^n - \{y\}) = H_n(f(U_i), f(U_i) - \{y\})$$

jest izomorfizmem, stąd $\deg(f|x_i) = \pm 1$.

TWIERDZENIE. $\deg(f) = \sum_i \deg(f|x_i)$.

TWIERDZENIE. $\deg(f) = \sum_i \deg(f|x_i)$.

__Dowód__: Niech U_i — parami rozłączne otwarte otoczenia x_i w S^n.

Następujący diagram komutuje, zaś na obwodzie ma kombinację diagramów użytych do określenia stopni f w punktach x_i.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, mapsto] & & \\
(1,1,\dots,1) & H_n S^n \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "j_*\ \text{włożenie}"] \arrow[dl, "\bigoplus_i \cong"', "\text{włożenia na poszczególne współrzędne}"] & H_n S^n \arrow[d, "i_*\ \text{włożenie}", "\cong"'] \\
\bigoplus_i H_n(S^n, S^n-\{x_i\}) & H_n(S^n, S^n-f^{-1}(y)) \arrow[l, "\bigoplus(p_i)_*"'] \arrow[r, "f_*"] & H_n(S^n, S^n-\{y\}) \\
 & H_n\left[\bigsqcup_i U_i, \bigsqcup_i U_i-\{x_i\}\right] \arrow[u, "\text{wycięcie}", "\cong"'] \arrow[ur, "(f|\bigsqcup U_i)_*"] & \\
 & \bigoplus_i H_n(U_i, U_i-\{x_i\}) \arrow[u, "\sum_i (k_i)_*\ \text{suma włożeń}", "\cong"'] \arrow[uul, "\bigoplus_i \cong_i", "\cong"'] \arrow[uur, "\text{suma wartości na poszczególnych współrzędnych}", "\sum_i (f|U_i)_*"'] & \\
 & (1,1,\dots,1) &
\end{tikzcd}
$$

$k_i : U_i \to \bigsqcup U_i$ włożenie

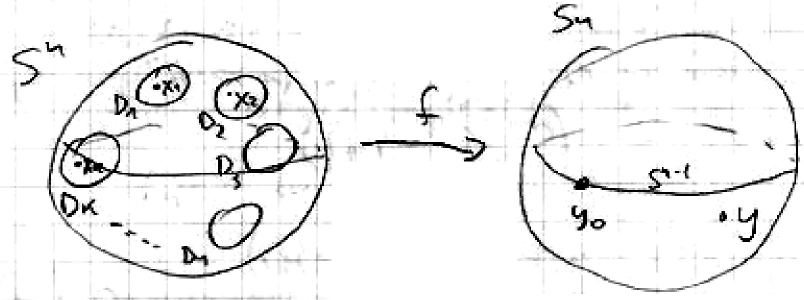
$p_i : (S^n, S^n - f^{-1}(y)) \to (S^n, S^n-\{x_i\})$

Wynika stąd, że

$$\deg(f) = f_*(1) = i_*^{-1}\left(\left[\sum_i (f|U_i)_*\right](1,\dots,1)\right) = i_*^{-1}\left(\sum_i (f|U_i)_*(1)\right) =$$

$$= \sum_i i_*^{-1} (f|U_i)_*(1) = \sum_i \deg(f|x_i). \qquad \square$$

PRZYKŁAD odwzorowanie $f: S^n \to S^n$ dowolnego stopnia d.



- $f|_{\mathrm{int}\, U_i}: \mathrm{int}\, D_i \to S^n - \{y_0\}$ homeo $\forall i$
- $f(S^n - \bigcup_i \mathrm{int}\, D_i) = y_0$

k parami rozłącznych dysków $D_1, \ldots, D_k$ w S^n

$y \neq y_0$, $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $\deg(f) = \sum_i \deg(f|x_i)$

Niech $U_i = \mathrm{int}\, D_i$. Mamy

$$\begin{tikzcd}
 & (S^n - y_0, (S^n - y_0) - \{y\}) \arrow[d, "i"] \\
(U_i, U_i - \{x_i\}) \arrow[ur, "f|U_i"] \arrow[r, "f|U_i"'] & (S^n, S^n - \{y\})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(S^n - y_0, (S^n - y_0) - y) \arrow[d, "\cong", "\text{wycinanie}"'] \\
H_n(U_i, U_i - \{x_i\}) \arrow[ur, "\text{izo bo homeo}"] \arrow[r, "(f|U_i)_*"'] & H_n(S^n, S^n - \{y\})
\end{tikzcd}$$

$\uparrow$ więc izo

$\deg(f|x_i) = \pm 1 \quad \forall i$

Poprawiamy f podkładając odbicie względem S^{n-1} zawierającego y_0 na poszczególnych fragmentach $f|_{D_i}$

W ten sposób dostaniemy zarówno $\deg(f) = k$ jak też $\deg(f) = -k$.

PRZYKŁAD 2.

$f: S^1 \to S^1$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $f(z) = z^d$

$y = 1$ $\quad f^{-1}(y) = \{ e^{k\frac{2\pi i}{d}} : k = 0, 1, \dots, d-1 \} = \{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{d-1}\}$

Niech $d > 0$. Pokażę że $\deg(f|\varepsilon_k) = +1$, czyli $\deg(f) = \sum \deg(f|\varepsilon_k) = d$

W parametryzacji kątowej θ lokalnie wokół ε_k f ma postać

$$k \cdot \frac{2\pi}{d} + \theta \longmapsto d \cdot \theta \qquad \left(k \cdot \frac{2\pi}{d} \text{ odpowiada } \varepsilon_k,\ 0 \text{ odpowiada } y = 1 \right)$$

Możemy homotopijnie zmodyfikować f wokół wszystkich ε_k naraz

by we współrzędnych kątowych miały postać $\quad k \cdot \frac{2\pi}{d} + \theta \mapsto \theta$

czyli lokalnie taką postać jak obroty $R_{k \cdot \frac{2\pi}{d}}$ o kąt $k \cdot \frac{2\pi}{d}$

Mamy wtedy $\deg(f|\varepsilon_k) = \deg R_{k \cdot \frac{2\pi}{d}} = +1$.

Podobnie pokazuje się że $\deg(f) = d$ gdy $d < 0$.

Gdy $d = 0$, f jest stała, stąd $\deg(f) = 0$.

PRZYKŁAD 3 (Konstrukcja odwzorowań $S^n \to S^n$ dowolnego stopnia za pomocą zawieszenia).

$$CX = X \times [0,1] / X \times \{0\} \qquad \text{stożek}$$

dla $f: X \to Y$ mamy $Cf: CX \to CY$, $Cf([x,t]) = [f(x), t]$

$$\Sigma X = CX / X \times \{1\} \ \left[= X \times [0,1] / X \times \{0,1\} \right] \quad \text{- zawieszenie}$$

$$\Sigma f: \Sigma X \to \Sigma Y, \quad \Sigma f([x,t]) = [f(x), t]$$

- $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$

LEMAT. Dla $f: S^n \to S^n$ mamy $\deg(\Sigma f) = \deg(f)$.

d-d:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_{n+1} S^{n+1} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\Sigma f)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\text{[dobre pary]}"] & H_{n+1}(CS^n, S^n \times 1) \arrow[r, "\partial = \cong"] \arrow[d, "(Cf)_*"] \arrow[dr, phantom, "\text{[ciąg dokładny pary + naturalność]}"] & H_n S^n \arrow[d, "f_*"] \\
\tilde{H}_{n+1} S^{n+1} \arrow[r, "\cong"] & H_{n+1}(CS^n, S^n \times 1) \arrow[r, "\partial = \cong"] & H_n S^n
\end{tikzcd}$$

$\square$

UWAGI.

(1) Zawieszając f z przykładu 2 dostajemy $f: S^n \to S^n$ dowolnego stopnia, dla dowolnego n.

(2) W zawieszeniu ΣX niech $N = [X \times \{0\}]$, $S = [X \times \{1\}]$.
Dla odwzorowania Σf mamy $(\Sigma f)^{-1}(N) = N$, $(\Sigma f)^{-1}(S) = S$.
Wtedy $\deg(\Sigma f|N) = \deg(\Sigma f) = \deg(\Sigma f|S)$.
Zatem otrzymujemy odwzorowania $S^n \to S^n$, których stopień lokalny w pewnych punktach jest dowolną całkowitą liczbą d.

DEF. CW-kompleks X to p. topologiczna z następującą strukturą komórkową:

(1) dyskretny zbiór X^0 [bardziej tradycyjnie: $X^{(0)}$]

- punkty w X^0 to tzw. 0-komórki

(2) indukcyjnie, <u>n-szkielet</u> X^n powstaje z X^{n-1} przez doklejenie rodziny n-komórek $D^n_\alpha \cong D^n$ przez odwzorowania $\varphi_\alpha : \partial D^n_\alpha \to X^{n-1}$

$$X^n = \left(X^{n-1} \sqcup_\alpha D^n_\alpha\right) / \sim$$

gdzie relacja $\sim$ jest indukowana przez identyfikacje $x \sim \varphi_\alpha(x)$ dla $x \in \partial D^n_\alpha$

UWAGA: Odwzorowanie φ_α (tzw. <u>odwzor.</u> <u>charakt.</u> dla D^n_α) indukuje $\overline{\varphi_\alpha} : D^n_\alpha \to X^n$.

Obraz $\overline{\varphi_\alpha}(\operatorname{int} D^n_\alpha) \subset X^n$ oznaczamy e^n_α i nazywamy (otwartą) n-komórką w X^n.

$\overline{\varphi_\alpha}|_{\operatorname{int} D^n_\alpha} : \operatorname{int} D^n_\alpha \to e^n_\alpha$ jest homeo

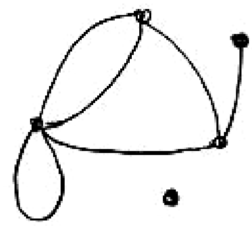
czyli topologia indukowana z X^n na e^n_α jest taka jak dla otwartego n-dysku.

Mnogościowo, X^n jest sumą rozłączną $X^{n-1} \sqcup_\alpha e^n_\alpha$.

(3) Albo zatrzymujemy się na pewnym n, $X := X^n$, albo kontynuujemy do nieskończoności, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$; w tym drugim przypadku bierzemy na X tzw. <u>słabą</u> topologię: $A \subset X$ jest otwarty (domknięty) $\Leftrightarrow$ $A \cap X^n$ jest otwarty (domknięty) w X^n dla każdego n.

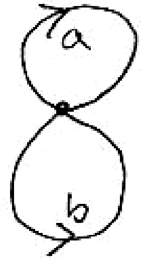
Jeśli $X = X^n$ dla pewnego n, to X jest skończenie wymiarowy. Najmniejsze n takie że $X = X^n$ nazywamy wtedy wymiarem X, $n = \dim X$.

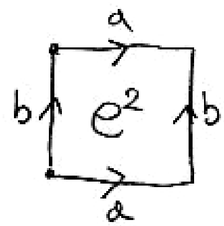
PRZYKŁADY. (1)



1-wymiarowy CW-kompleks = (topologiczny) graf

(2) $X^1 =$





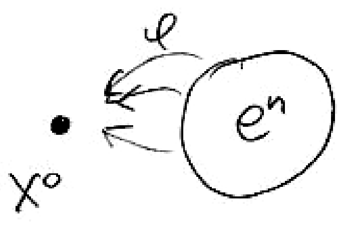
$X = X^2 =$

2-wymiarowy torus T^2

(3) Struktura CW-kompleksu na sferze S^n:

komórki e^0 i e^n (po jednej)

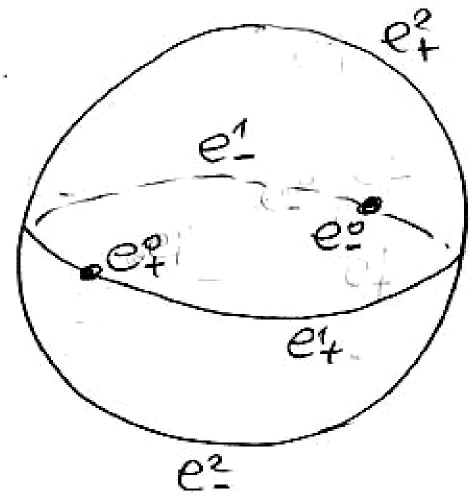
odwzorowanie charakterystyczne dla e^n: $\varphi : \partial D^n \to e^0 = \{x_0\}$ stałe (jedyne możliwe)



(4) Inna struktura CW na S^n:

po 2 komórki

w wymiarach $0, 1, \dots, n$.



Kilka innych przykładów: Hatcher str. 5–7.

Def. Podkompleksem w CW-kompleksie X nazywamy domkniętą podprzestrzeń $A \subset X$ które jest sumą mnogościową pewnej rodziny otwartych komórek.

Z domkniętości A wynika, że odwzorowanie charakterystyczne $\varphi_\alpha : \partial D^n_\alpha \to X^{n-1}$ dowolnej komórki $e^n_\alpha \subset A$ ma obraz w A. Stąd wynika, że A ma dziedziczone z X strukturę CW-kompleksu

– stąd nazwa podkompleks.

Para (X, A) - gdzie X - CW-kompleks, A - podkompleks jest nazywana CW-parą.

UŻYTECZNA OBSERWACJA.

Każdy CW-kompleks X jest rozłączną sumą mnogościową swoich otwartych komórek e^n_α wszystkich wymiarów:

$$X = \bigsqcup_{n,\alpha} e^n_\alpha .$$

WAŻNA WŁASNOŚĆ TOPOLOGII CW-KOMPLEKSÓW

FAKT. Zwarty podzbiór C w CW-kompleksie X przecina się niepusto ze skończenie wieloma otwartymi komórkami.

Dowód: Załóżmy nie wprost, że mamy nieskończony ciąg x_i punktów z C leżących w parami różnych otwartych komórkach. Pokażemy indukcyjnie, że zbiór $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ jest domknięty w X, uzasadniając że $S \cap X^n$ jest domknięty w X^n.

Dla $n=0$ jest to oczywiste, bo X^0 dyskretna.

Zał. że $S \cap X^n$ domknięty w X^n.

Wtedy dla dowolnej $(n+1)$-komórki e_α^{n+1} przeciwobraz $\varphi_\alpha^{-1}(S)$ jest domknięty w ∂D_α^{n+1}.

Zatem przeciwobraz $(\overline{\varphi_\alpha})^{-1}(S) = \varphi_\alpha^{-1}(S) +$ co najwyżej jeden punkt jest domknięty w D_α^{n+1};

a to oznacza że $S \cap X^{n+1}$ domknięty w X^{n+1}.

Analogicznie pokazujemy, że dowolny podzbiór S jest domknięty w X, więc S jest dyskretnym podzbiorem.

Jako domknięty podzbiór w zwartym C, S jest zwarty.

Zwarty dyskretny zbiór musi być skończony — SPRZECZNOŚĆ. $\square$

WNIOSEK 1

Obraz dowolnego odwzorowania charakterystycznego $\varphi_\alpha : \partial D^n_\alpha \to X^{n-1}$ przecina skończenie wiele otwartych komórek w X^{n-1}.

Stąd indukcyjnie wyprowadzamy:

WNIOSEK 2

Zwarty podzbiór C w CW-kompleksie X zawiera się w pewnym skończonym podkompleksie.

DEF. X, Y - CW-kompleksy.

Ciągłe odwzorowanie $f: X \to Y$ nazywamy komórkowym

jeśli $\forall n \ f(X^n) \subset Y^n$.

TWIERDZENIE.

(A) Każde ciągłe $f: X \to Y$ pomiędzy CW-kompleksami jest homotopijne z pewnym komórkowym $g: X \to Y$.

(B) Jeśli f już jest komórkowe na podkompleksie $A \subset X$, to powyższe g można dobrać tak, że homotopia $f \simeq g$ jest identycznościowa na A (w szczególności, $g|_A = f|_A$).

(C) Każde ciągłe odwzorowanie $f: (X, A) \to (Y, B)$ CW-par może być homotopijnie zdeformowane, przez odwzorowania $(X, A) \to (Y, B)$, do odwzorowania komórkowego.

Dowody można znaleźć na str. 349-351 u Hatchera.
Opierają się na następującej własności:
$\forall n \ \forall k > 0$ dowolne $f: S^n \to S^{n+k}$ jest homotopijne ze stałym.