ORIENTACJE I STOPNIE

- orientacja sfery S^n to wybór jednego z dwóch generatorów w grupie $H_n S^n \cong \mathbb{Z}$.

- zorientowana sfera to para (S^n, a), gdzie $a \in H_n S^n$ – generator

- stopień $\deg(f)$ odwzorowania $f : (S_1^n, a_1) \to (S_2^n, a_2)$ pomiędzy zorientowanymi sferami to taka liczba $n \in \mathbb{Z}$ że $f_*(a_1) = n a_2$.

  UWAGA. Jeśli f jest homeomorfizmem, to $\deg(f) \in \{1, 1\}$.
  Gdy $\deg(f) = 1$, mówimy że f zachowuje orientację,
  zaś gdy $\deg(f) = -1$, to f zmienia orientację.

- orientacja dysku D^n
  to orientacja ilorazowej sfery $D^n/\partial D^n \cong S^n$
  [dzięki kanonicznym izomorfizmom
  $$H_n(D^n/\partial D^n) \cong \widetilde{H}_n(D^n/\partial D^n) \cong H_n(D^n, \partial D^n)$$
  jest to równoważne wyborowi generatora $b \in H_n(D^n, \partial D^n) \cong \mathbb{Z}$]

  UWAGA. Dla zorientowanych dysków D_1^n, D_2^n możemy mówić o stopniu odwzorowania $f : (D_1^n, \partial D_1^n) \to (D_2^n, \partial D_2^n)$

- orientacja indukowana z dysku D^n na sferę $\partial D^n \cong S^{n-1}$:
  - orientacja D^n to generator $b \in H_n(D^n, \partial D^n) \cong \mathbb{Z}$
  - w ciągu dokładnym pary $(D^n, \partial D^n)$ mamy homomorfizm dołączony
  $$\overset{\mathbb{Z}}{\overset{\shortparallel\!\!S}{H_n(D^n, \partial D^n)}} \xrightarrow[\cong]{\delta} \overset{\mathbb{Z}}{\overset{\shortparallel\!\!S}{H_{n-1} \partial D^n}},$$
  który jest izomorfizmem
  - indukowana z (D^n, b) orientacja na ∂D^n to generator $\delta(b) \in H_{n-1} \partial D^n$.

KOMÓRKOWY KOMPLEKS ŁAŃCUCHOWY DLA CW-KOMPLEKSU

X CW-kompleks

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} \cup \bigsqcup_{\alpha} e_\alpha^{n+1} = X^n \cup_{\sqcup\varphi_\alpha} \bigsqcup_{\alpha} D_\alpha^{n+1}, \ \varphi_\alpha : \partial D_\alpha^{n+1} \to X^{(n)}$$

$(e_\alpha^{n+1} = \mathrm{int}\, D_\alpha^n)$.

- dla każdej komórki e_α^n w X (każdego wymiaru n) ustalamy/obieramy pomocniczą orientację dysku D_α^n
- dla pary komórek $e_\alpha^{n+1}, e_\beta^n$ w X określamy współczynnik <u>incydencji</u> $i_{\alpha,\beta}$ jako

$$i_{\alpha\beta} := \deg\left[S_\alpha^n = \partial D_\alpha^{n+1} \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^{(n)}/X^{(n)} \setminus e_\beta^n \overset{\text{naturalne utożsamienie}}{=} D_\beta^n/\partial D_\beta^n = S_\beta^n \right]$$

gdzie sfera $S_\alpha^n = \partial D_\alpha^{n+1}$ ma orientację indukowaną z D_α^{n+1}

zaś sfera $S_\beta^n = D_\beta^n/\partial D_\beta^n$ ma orientację dysku D_β^n.

PRZYKŁAD/ĆWICZENIE/UWAGA

- Gdy $\varphi_\alpha(\partial D_\alpha^{n+1}) \cap e_\beta^n = \emptyset$, to $i_{\alpha,\beta} = 0$.
- Ogólnie, w CW-kompleksach, $i_{\alpha,\beta}$ może być dowolną liczbą całkowitą.

- $\mathcal{X}_n := \{\alpha : e_\alpha^n$ jest n-wymiarową komórką w $X\}$

grupa komórkowych n-wymiarowych łańcuchów dla X

- $C_n^{CW}X := \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{X}_n} \mathbb{Z} e_\alpha^n$ (wolny $\mathbb{Z}$-moduł z bazą $\{e_\alpha^n\}$)

- elementy $C_n^{CW}X$ to skończone formalne kombinacje

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{X}_n} n_\alpha \cdot e_\alpha^n \qquad n_\alpha \in \mathbb{Z} .$$

- komórkowe operatory brzegowania $\partial_{n+1}^{CW} : C_{n+1}^{CW}X \to C_n^{CW}X$ zadane na elementach bazy jako

$$\partial_{n+1}^{CW}(e_\alpha^{n+1}) := \sum_{\beta \in \mathcal{X}_n} i_{\alpha,\beta} \cdot e_\beta^n$$

UWAGI.

- Jest to suma skończona, bo obraz $\varphi_\alpha(\partial D_\alpha^{n+1})$, jako zbiór zwarty, zawiera się w skończonym podkompleksie w n-szkielecie $X^{(n)}$, więc „zahacza" o jedynie skończenie wiele komórek e_β^n.
- Pełny wzór na homomorfizm ∂_{n+1}^{CW} to

$$\partial_{n+1}^{CW}\left(\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha^{n+1}\right) = \sum_{\alpha \in \mathcal{X}_{n+1}} \sum_{\beta \in \mathcal{X}_n} n_\alpha i_{\alpha\beta} e_\beta^n .$$

- homomorfizm ∂_0^{CW} jest określony jako homomorfizm zerowy $\partial_0^{CW} : C_0^{CW}X \to 0$
- Wykażemy (później) że $\forall n \geq 0 \quad \partial_{n+1}^{CW} \circ \partial_n^{CW} = 0$.

- Otrzymaliśmy zatem komórkowy kompleks łańcuchowy

$$C_*^{CW}X = [C_*^{CW}X, \partial_*^{CW}]$$

- homologie komórkowe CW-kompleksu X

to homologie $H_*(C_*^{CW}X)$, a więc

$$- \quad H_n^{CW}X := \underset{\substack{\uparrow \\ \text{komórkowe} \\ n\text{-cykle} \\ Z_n^{CW}X}}{\ker \partial_n^{CW}} \Big/ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{komórkowe} \\ n\text{-brzegi} \\ B_n^{CW}X}}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}^{CW}}$$

FAKT. Dla dowolnego CW-kompleksu X i dowolnego pomocniczego wyboru orientacji komórek w X mamy kanoniczny izomorfizm

$$H_n^{CW}X \cong H_nX \qquad \forall n \geq 0.$$

(homologie CW-kompleksów są jawnie wyliczalne, i wyliczenia te mają ten stopień trudności co wyliczenia współczynników incydencji $i_{\alpha\beta}$ w tych CW-kompleksach)

DOWÓD FAKTU BĘDZIE PÓŹNIEJ

RELATYWNE HOMOLOGIE KOMÓRKOWE

R1

5

- Dla par CW-kompleksów (X,Y)
  $[X$ - CW-kompleks, Y - podkompleks$]$

$$\mathcal{X}_n = \{\alpha : e^n_\alpha \text{ jest } n\text{-komórką w } X\}$$

$$\mathcal{Y}_n = \{\alpha : e^n_\alpha \subset Y\}$$

- relatywne łańcuchy komórkowe

$$C^{CW}_n(X,Y) := C^{CW}_n X / C^{CW}_n Y = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{X}_n \setminus \mathcal{Y}_n} \mathbb{Z} e^n_\alpha$$

- homomorfizm relatywnego komórkowego brzegowania

$$\partial^{CW}_{n+1} : C^{CW}_{n+1}(X,Y) \to C^{CW}_n(X,Y)$$ - indukowany na ilorazach

ĆWICZENIE. Przy utożsamieniach

$$C^{CW}_{n+1}(X,Y) = \bigoplus_{\mathcal{X}_{n+1} \setminus \mathcal{Y}_{n+1}} \mathbb{Z} e^{n+1}_\alpha, \quad C^{CW}_n(X,Y) = \bigoplus_{\mathcal{X}_n \setminus \mathcal{Y}_n} \mathbb{Z} e^n_\beta$$

brzegowanie $\partial^{CW}_{n+1} : C^{CW}_{n+1}(X,Y) \to C^{CW}_n(X,Y)$ przyjmuje postać:

dla $\alpha \in \mathcal{X}_{n+1} \setminus \mathcal{Y}_{n+1}$

$$\partial^{CW}_{n+1}(e^{n+1}_\alpha) = \sum_{\beta \in \mathcal{X}_n \setminus \mathcal{Y}_n} i_{\alpha,\beta} \cdot e^n_\beta .$$

- $H^{CW}_n(X,Y) = H_*(C^{CW}_*(X,Y))$
- $H^{CW}_n(X,Y) \cong H_n(X,Y)$.

dla CW-pary (X,Y)
- krótki ciąg dokładny

$$0 \to C_*^{CW} Y \xrightarrow{i} C_*^{CW} X \xrightarrow{j} C_*^{CW}(X,Y) \to 0$$

kompleksów łańcuchowych indukuje długi ciąg dokł.

$$\to H_n^{CW} Y \xrightarrow{i_*} H_n^{CW} X \xrightarrow{j_*} H_n^{CW}(X,Y) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}^{CW} Y \to$$

w którym homomorfizm dołączony $\delta : H_n^{CW}(X,Y) \to H_{n-1}^{CW} Y$

jest zadany następująco:

dla klasy homologii $[z] \in H_n^{CW}(X,Y)$

reprezentowanej łańcuchem $z \in C_n^{CW} X$ takim, że

$\partial_n^{CW} z \in C_{n-1} Y$

Zachodzi

$$\delta([z]) = [\partial_n^{CW} z] \in H_{n-1} Y.$$

HOMOMORFIZMY INDUKOWANE PRZEZ ODWZOROWANIA KOMÓRKOWE

- odwzorowanie komórkowe $f: X \to Y$ pomiędzy CW-kompleksami

  (1) ciągłe, (2) $f(X^{(k)}) \subset Y^{(k)}$ $\forall k$.

  UWAGA. Każde ciągłe $g: X \to Y$ jest homotopijne z pewnym komórkowym f, więc jest to sensownie ogólna klasa odwzorowań.

- indukowany homomorfizm łańcuchowy $f_\#: C_*^{CW}X \to C_*^{CW}Y$

  (komutujący z komórkowymi brzegowaniami ∂^{CW} - dowód później)

  $*$ dla komórek $e^n_\alpha \subset X$, $e^n_\beta \subset Y$ określamy liczbę

$$f_{\alpha,\beta} := \deg\left[S^n = D^n_\alpha / \partial D^n_\alpha \xrightarrow{[f|D^n_\alpha]} Y^{(n)}/Y^{(n)} \setminus e^n_\beta \right]$$

$$\| \qquad D^n_\beta / \partial D^n_\beta = S^n$$

  (wcześniej wybieramy pomocnicze orientacje wszystkich komórek w X i Y)

  $*$ $f_\#(e^n_\alpha) = \sum_{\beta \in \mathcal{Y}_n} f_{\alpha,\beta} \cdot e^n_\beta$ $\left[\text{stąd } f_\#\left(\sum_{\mathcal{X}_n} k_\alpha e^n_\alpha\right) = \sum_{\mathcal{Y}_n} \left[\sum_{\mathcal{X}_n} f_{\alpha\beta} k_\alpha\right] e^n_\beta\right]$

  (skończona suma, bo zwarty obraz $f[D^n_\alpha]$ zahacza jedynie o skończenie wiele otwartych e^n_β, a w pozostałych przypadkach współczynniki $f_{\alpha,\beta}$ się zerują)

- stąd otrzymujemy indukowany homomorfizm homologii komórkowych

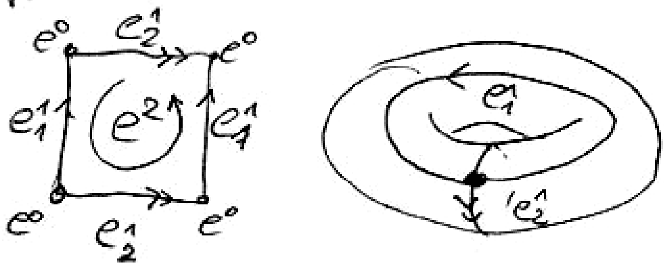
  $f_* = f_*^{CW}: H_n^{CW}X \to H_n^{CW}Y$

- homomorfizm ten pokrywa się z homomorfizmem f_* dla homologii singularnych.

UWAGA. Bardzo podobnie można określić indukowane homomorfizmy $f_\#: C_*^{CW}(X, A) \to C_*^{CW}(Y, B)$ oraz $f_*: H_*^{CW}(X, A) \to H_*^{CW}(Y, B)$ dla CW-par (X, A) (Y, B) i odwzorowania komórkowego $f: (X, A) \to (Y, B)$.

SZCZEGÓŁY POMIJAMY

PRZYKŁAD — torus T^2



wybrana struktura CW-kompleksu dla torusa T^2

— strzałki reprezentują wybrane orientacje

$$C_0^{CW} = \mathbb{Z}e^0, \quad C_1^{CW} = \mathbb{Z}e_1^1 \oplus \mathbb{Z}e_2^1, \quad C_2^{CW} = \mathbb{Z}e^2$$

$C_k^{CW} = 0$ dla $k > 2$

$$\partial_0^{CW} = 0$$

$$\partial_1^{CW}(e_1^1) = e^0 - e^0 = 0, \quad \partial_1^{CW}(e_2^1) = e^0 - e^0 = 0, \quad \partial_1^{CW} = 0$$

$$\partial_2^{CW}(e^2) = e_1^1 + e_2^1 - e_1^1 - e_2^1 = 0$$

$H_0^{CW} T^2 = \mathbb{Z}$, $\quad H_1^{CW} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (generatory: $[e_1^1], [e_2^1]$)

$H_2^{CW} T^2 = \mathbb{Z}$ (generator: $[e^2]$), $\quad H_k^{CW} T^2 = 0$ dla $k > 2$.

KILKA PROSTYCH KONSEKWENCJI OGÓLNYCH

(1) $H_n X = 0$ gdy CW-kompleks X nie ma żadnych n-komórek

(2) Jeśli X ma k n-komórek, to grupa $H_n X$ jest generowana przez $\leq k$ elementów. [rank $H_n X \leq k$].

d-d:

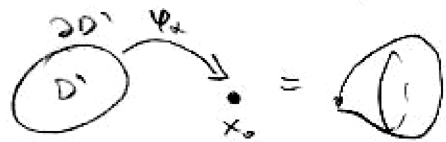
$$\operatorname{rank} C_n^{CW} X = k$$

$$\ker d_n < C_n^{CW} \Rightarrow \operatorname{rank}(\ker d_n) \leq \operatorname{rank} C_n^{CW} X = k$$

$$\operatorname{rank}(\ker d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}) \leq \operatorname{rank}(\ker d_n) = k. \quad \square$$

(3) Jeśli X jest CW-kompleksem nie posiadającym komórek w żadnych dwóch sąsiednich wymiarach naraz, to $H_n X \cong C_n^{CW} X$ (wolna abelowa generowana przez zbiór n-komórek) $\forall n$.

PRZYKŁAD. $S^n \times S^n$, $n \geq 2$, z produktową strukturą CW, gdzie struktura na S^n jest postaci



$$H_{2n} S^n \times S^n = \mathbb{Z}$$

$$H_n S^n \times S^n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H_0 S^n \times S^n = \mathbb{Z}$$

$$H_k S^n \times S^n = 0 \quad \text{dla } k \notin \{0, n, 2n\}.$$

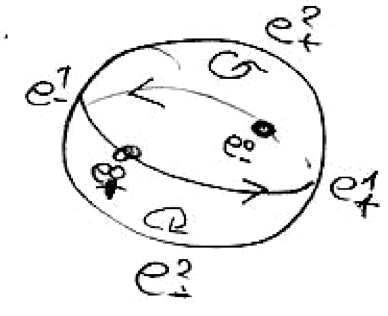
Inne przykłady wyliczeń: Hatcher, str. 140-146

PRZYKŁAD WYLICZENIA HOMOMORFIZMU INDUKOWANEGO PRZEZ ODWZOR. KOMÓRKOWE

$\mathbb{R}P^2 = S^2/$antypodyzm $x \sim -x$, $p: S^2 \to \mathbb{R}P^2$

odwzorowanie ilorazowe

- Rozważmy na S^2 strukturę CW-kompleksu



  z 2 komórkami w wymiarach 0, 1, 2
  jak na rysunku obok

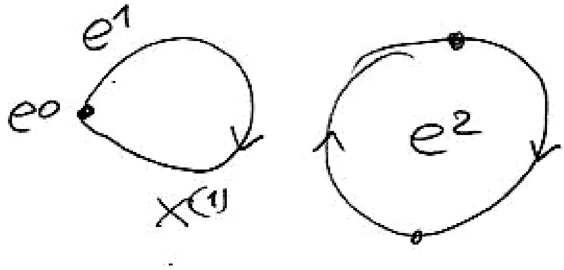
Nietrudno wyliczyć, że

$$H_n^{CW} S^2 = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 2 \\ 0 & n = 1, n > 2 \end{cases}$$

gdzie generatorem $H_0^{CW} S^2$ jest $[e^0_+] = [e^0_-]$

zaś generatorem $H_2^{CW} S^2$ jest $[e^2_+ - e^2_-]$

- Rozważmy na $\mathbb{R}P^2$ ilorazową strukturę CW-kompleksu
  - po jednej komórce w wymiarach 0, 1, 2



  - odwzorowanie charakterystyczne $\varphi: \partial e^2 \to X^{(1)}$ opisane strzałkami na brzegu komórki e^2 (dwukrotne nakrycie)
  - komórkowy kompleks łańcuchowy

$$0 \to \mathbb{Z}e^2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}e^1 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}e^0 \to 0$$

$H_2^{CW} \mathbb{R}P^2 = 0$, $H_1^{CW} \mathbb{R}P^2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ (generator: $[e^1]$)

$H_0^{CW} \mathbb{R}P^2 = \mathbb{Z}$ (generator: $[e^0]$).

- homomorfizm $p_\# : C^{CW}_* S^2 \to C^{CW}_* \mathbb{RP}^2$ jest zadany przez:

 - $p_\#(e^0_+) = p_\#(e^0_-) = e^0$
 - $p_\#(e^1_+) = p_\#(e^1_-) = e^1$
 - $p_\#(e^2_+) = p(e^2_-) = e^2$

Stąd

$$p_* : \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{H_0 S^2}} \to \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{H_0 \mathbb{RP}^2}} \quad \text{izomorfizm}$$

$$p_* : \underset{0}{\underset{\parallel}{H_1 S^2}} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}_2}{\underset{\parallel}{H_1 \mathbb{RP}^2}} \quad \text{zerowy}$$

$$p_* : \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{H_2 S^2}} \longrightarrow \underset{0}{\underset{\parallel}{H_2 \mathbb{RP}^2}} \quad \text{zerowy}$$