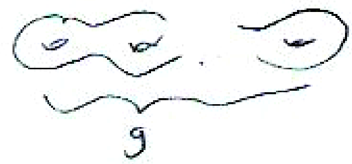
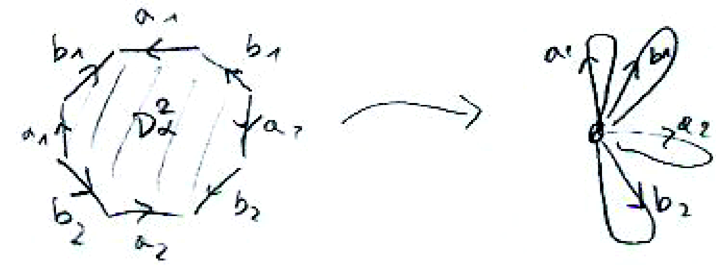
PRZYKŁADY – Homologie 2-kompleksów.

(1) 

M_g 

ogólnie : 1 wierzchołek
2g krawędzie $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$
1 2komórka $\varphi \sim \prod_{i=1}^{g} [a_i b_i]$

$C_*^{CW}(M_g)$:

$$\dots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0$$

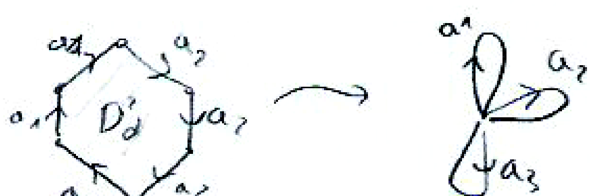
$d_1 = 0$ bo wszystkie 1-komórki są pętlami

$d_2 = 0$, bo

$\Delta_{\alpha,e} : \partial D^2_\alpha \to M_g^{(1)} / M_g^1 - \mathrm{int}(e)$

jest postaci  , więc homotopije ze stałym

więc $i_{\alpha e} = \deg(\Delta_{\alpha,e}) = 0 \quad \forall e$.

(2) $N_g \cong \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_{g}$ 

$H_0 N_g = \mathbb{Z}$
$H_1 N_g \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2$
$H_2 N_g \cong 0$

ogólnie : 1 wierzchołek
g krawędzi $a_1, \dots, a_g$
1 2komórka, $\varphi \sim a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2$

$$\to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^g \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0$$

$d_1 = 0 \quad d_2(1) = (2, 2, \dots, 2)$ bazą w $\mathbb{Z}^g$ z $(1, 1, \dots, 1)$ zamiast $(0, \dots, 0, 1)$

(3) 2-kompleks acykliczny homotopijnie nietrywialny

DEF. Przestrzeń X jest acykliczna jeśli $\tilde{H}_i X = 0 \quad \forall i$.

$$X = (S^1 \vee S^1) \cup (D^2_{\alpha_1}, \varphi_1) \cup (D^2_{\alpha_2}, \varphi_2)$$

$$\varphi_1 \sim a^5 b^{-3}, \quad \varphi_2 \sim b^3 (ab)^{-2}$$

ACYKLICZNOŚĆ:

$$0 \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0, \quad d_1 = 0$$

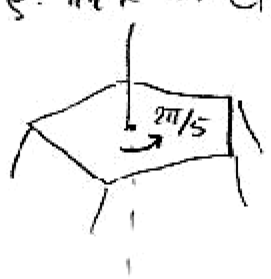
- $d_2 : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ zadane macierzą $\begin{pmatrix} d_{\alpha_1, a} & d_{\alpha_2, a} \\ d_{\alpha_1, b} & d_{\alpha_2, b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = M$
- $\det M = -1$, więc M^{-1} jest całkowitoliczbowa, więc d_2 jest izomorfizmem $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$
- stąd $\ker d_2 = 0$, $H_2 X = 0$

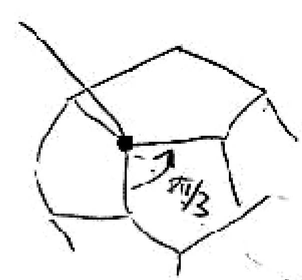
$\operatorname{Ker} d_1 = \mathbb{Z}^2 = \operatorname{Im} d_2$, $H_1 X = 0$

$H_0 X = \mathbb{Z}$, $\tilde{H}_0 X = 0$.

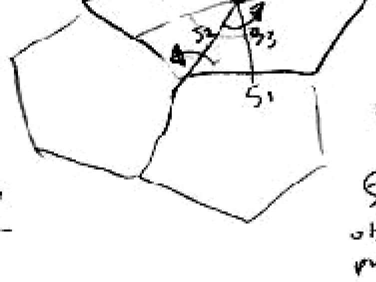
HOMOTOPIJNA NIETRYWIALNOŚĆ:

$$\pi_1 X = \langle a, b \mid a^5 b^{-3}, b^3 (ab)^{-2} \rangle$$

- pokażemy że $\pi_1 X$ nietrywialne przez wskazanie homomorfizmu $\rho : \pi_1 X \to G_{12}$ na grupę obrotów 12-ścianu foremnego
- $\rho(a) =$ 

, $\rho(b) =$ 

$\rho(a)^5 = 1$, $\rho(b)^3 = 1$



$\rho(a) = s_3 s_2$

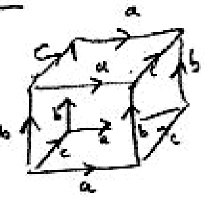
$\rho(b) = s_2 s_1$

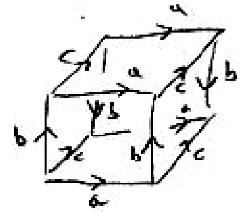
$\rho(a)\rho(b) = s_3 s_1$
obrót o π wokół osi przez środek krawędzi

$(\rho(a)\rho(b))^2 = 1$

Stąd spełnione są relacje. □

Homologie 3-kompleksów

$T^3 = S^1\times S^1\times S^1 =$ 

, $X^3 = K^2\times S^1 =$ 

$[K^2 \sim (b,c)\ ,\ S^1 \sim a]$

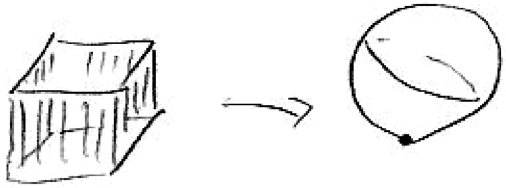
w obu wypadkach

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \to 0$$

$d_1 = 0$, $d_2 = 0$ dla T^3, $d_2(a,b) = d_2(a,c) = 0$, $d_2(b,c) = 2b$

Różne d_3.

• dla torusa T^3:

$\Delta_{\alpha,\beta} : S^2 \to S^2$ 

podłożenie odbicie nie zmienia odwzorowania, więc $\deg(\Delta_{\alpha,\beta}) = 0$

Stąd $d_3 = 0$

$$H_i T^3 = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0,3 \\ \mathbb{Z}^3 & i = 1,2 \end{cases}$$

• dla $K\times S^1$

$d_{\alpha,\beta} = 0$ dla $\beta = (b,c)$, $\beta = (a,c)$

dla $\beta = (a,b)$ $d_{\alpha,\beta} = \pm 2$ (argument z podłożeniem obrotu o π wokół poziomej osi lewo/prawo)

Zatem $d_3(1) = (2,0,0)$

$$H_i(X^3) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2 & i = 1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & i = 2 \\ 0 & i = 3 \end{cases}$$

PRZESTRZENIE Moore'a

G - dowolna grupa abelowa, $n \geq 1$

DEF. X jest przestrzenią Moore'a $M(G,n)$ jeśli

- $H_n X = G$, $\tilde{H}_i X = 0$ $i \neq n$
- X jest jednospójna gdy $n > 1$.

KONSTRUKCJA.

(1) dla $G = \mathbb{Z}_m$, $X = S^n \cup (D^{n+1}, \varphi)$, $\varphi : \partial D^{n+1} \to S^n$, $\deg(\varphi) = m$.

(2) dla G będącej sumą prostą $\mathbb{Z}$-ów i $\mathbb{Z}_m$-ów

(np. każda skończenie generowana grupa abelowa)

X = bukiet przestrzeni z punktu (1)

(3) ogólnie, niech $F \to G$ surjekcja z wolnej abelowej F na G

(kanoniczna baza F na układ generatorów G)

niech $K = \ker(F \to G)$, $G \cong F/K$

- wiadomo że K jest wolna abelowa
- $\{x_\alpha\}$ baza F, $\{y_\beta\}$ baza K, $y_\beta = \sum_\alpha d_{\beta\alpha} x_\alpha$

$$X = \bigvee_\alpha S^n_\alpha \cup \bigcup_\beta (e^{n+1}_\beta, f_\beta)$$

$$f_\beta : \partial e^{n+1}_\beta \to \bigvee_\alpha S^n_\alpha$$

t.że $\partial e^{n+1}_\beta \to \bigvee_\alpha S^n_\alpha \to S^n_\alpha$

ma stopień $d_{\beta\alpha}$

Konstrukcja f_β: bierzemy $\sum_\alpha |d_{\beta\alpha}| < \infty$

parami rozłącznych dysków w ∂e^{n+1}_β

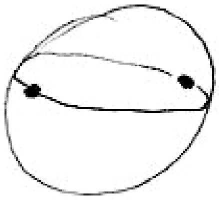
$(d_{\beta\alpha})$ z nich homeomorficznie na $S^n_\alpha - \{x_0\}$

z lokalnym stopniem $+1$ gdy $d_{\beta\alpha} > 0$, -1 gdy $d_{\beta\alpha} < 0$.

□

PRZYKŁAD. Bukiet odpowiednich przestrzeni Moore'a tworzy CW-kompleks X z dowolnymi kombinacjami abelowych grup jako homologii w poszczególnych wymiarach.

PRZESTRZENIE RZUTOWE:



$\rightsquigarrow$ CW struktura na $\mathbb{R}P^n$ z jedną komórką w każdym wymiarze

$$\varphi_k : \partial D^k_\alpha \to (\mathbb{R}P^n)^{(k-1)} = \mathbb{R}P^{k-1}$$ – odwzorowanie antypodyczne

$$\Delta_{\alpha\beta} : \quad \partial D^k_\alpha \to \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} \cong S^{k-1}$$

$$\Delta_{\alpha\beta} = q\varphi_k$$

$$\deg(q\varphi) = \deg(id_{S^{k-1}}) + \deg(-id_{S^{k-1}}) = 1 + (-1)^k =$$

$$= \begin{cases} 0 & k \text{ nieparzyste} \\ 1 & k \text{ parzyste} \end{cases}$$

(bo $q\varphi$ odwzorowuje komponenty $S^{k-1} - S^{k-2}$ homeo na $S^{k-1} - x_0$, przy czym odwzorowania tych komponent są związane położeniem antypodyzmu)

Kompleksy łańcuchowe komórkowe dla $\mathbb{R}P^n$:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

n parzyste

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

n nieparzyste

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0,\ k = n \text{ nieparzyste} \\ \mathbb{Z}_2 & k \text{ nieparzyste } 0 < k < n \\ 0 & \text{w pozostałych } k \end{cases}$$