Piotr Przytycki

Twierdzenie o punkcie stałym dla niedodatniej krzywizny symplicjalnej

rozprawa doktorska–streszczenie

wsparta przez grant MNiSW N201 003 32/0070

Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Mauk

Promotor:
Prof. dr hab. Jacek Świątkowski,
Uniwersytet Wrocławski

Wrocław 2007

Rozdział I

Wstęp

1 Niedodatnia krzywizna symplicjalna

Kompleksy i grupy systoliczne zostały wprowadzone przez T. Januszkiewicza i J. Świątkowskiego w [6] i, niezależnie, przez F. Haglunda w [4]. Kompleksy systoliczne to jednospójne kompleksy symplicjalne spełniające pewnie warunki na linki (zobacz Definicję 3.2). Niektóre z ich własności są bardzo podobne do własności przestrzeni metrycznych CAT(0) (tzn. niedodatnio zakrzywionych w sensie metrycznym, lub w sensie Aleksandrowa), w związku z tym nazywamy je kompleksami o *niedodatniej krzywiźnie symplicjalnej.* Z drugiej strony, grupy systoliczne (czyli grupy, które działają w sposób właściwy i kozwarty na kompleksach systolicznych) posiadają pewne egzotyczne własności, które sprawiają, że w wymiarach ≥ 3 różnią się one od do tej pory badanych rodzin grup. Wśród grup systolicznych są grupy dowolnie dużego wirtualnego wymiaru kohomologicznego [6].

Skupmy się na początek na podobieństwach między kompleksami i grupami systolicznymi, oraz przestrzeniami i grupami CAT(0). Najpierw zwróćmy uwagę, że kompleks symplicjalny wymiaru 2 jest sytoliczny wtw kiedy jest CAT(0) dla kawałkami Euklidesowej metryki, dla której krawędzie mają długość 1 (co czyni trójkąty równobocznymi). Jednakowoż, w wyższych wymiarach istnieją przykłady grupy G działającej przez automorfizmy symplicjalne na kompleksie sytolicznym X w taki sposób, że nie istnieje G–niezmiennicza kawałkami Euklidesowa metryka na X, która jest CAT(0). Nie wiadomo, czy wszystkie grupy systoliczne działają właściwie i kozwarcie na pewnych przestrzeniach CAT(0).

Jedno z najważniejszych podobieństw to fakt, że kompleksy systoliczne są ściągalne (Twierdzenie 4.1(1) w [6]). Można to twierdzenie uważać za odpowiednik w kontekście systolicznym twierdzenia Cartana–Hadamarda. Co więcej, każdy niedodatnio zakrzywiony symplicjalnie kompleks grup jest rozwijalny [6]. To twierdzenie powinno się porównywać z Twierdzeniem 4.17, Rozdział III.$\mathcal{C}$ w [1], które mówi, że każdy metrycznie niedodatnio zakrzywiony kompleks grup jest rozwijalny. Januszkiewicz i Świątkowski otrzymali powyższe rezultaty dotyczące kompleksów systolicznych wprowadzając i wykorzystując pojęcie wypukłości w kompleksach systolicznych. Znaleźli oni także bardzo wygodny system geodezyjnych (tzw. bi–uczesanie), który spełnia tak zwaną "fellow traveller property". W szczególności udowodnili, że grupy systoliczne są biautomatyczne [6]. To pociąga, na przykład, że wolne podgrupy abelowe (które jak się okazuje muszą mieć rangę ≤ 2, patrz niżej) grup systolicznych są niezdystortowane.

Ten kierunek rozwinęły prace T. Elsnera [2], [3]. W [2] Elsner dowiódł, że jeśli $H \cong \mathbb{Z}^2$ jest grupą działającą właściwie na kompleksie systolicznym X, to stowarzyszona z nią jest tzw. płaszczyzna systoliczna w X, która jest H–niezmiennicza. W kontekście przestrzeni CAT(0) ten wynik jest znany jako Twierdzenie o Płaskim Torusie, Twierdzenie 7.1, Rozdział II.7 w [1]. Elsner dowiódł także, że dla grupy $H \cong \mathbb{Z}$ działającej właściwie na kompleksie systolicznym X istnieje geodezyjna w 1–szkielecie X, która jest niezmiennicza względem pewnej podgrupy skończonego indeksu w H (por. [3]).

Nasza praca, która dotyczy twierdzenia o punkcie stałym dla skończonych grup automorfizmów, jest częścią programu szukania analogii pomiędzy kompleksami systolicznymi, a przestrzeniami metrycznymi CAT(0). W części 2 prezentujemy streszczenie naszych rezultatów.

Zwróćmy uwagę, że kompleksom systolicznym nie jest daleko do bycia hiperbolicznymi przestrzeniami metrycznymi w sensie Gromowa. Mianowicie, dowolny kompleks sytoliczny bez płaszczyzn systolicznych jest hiperboliczną przestrzenią metryczną, jak wykazano w [10] i niezależnie w [2]. Na przykład, jeśli nałoży się trochę silniejszy warunek na linki kompleksu systolicznego (warunek 7-dużości, zobacz Definicję 3.2), kompleks okazuje się być hiperboliczny, jak pokazano w [6]. Co więcej, dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba $k(n)$ taka, że jeśli linki kompleksu sytolicznego wymiaru $\leq n$ są $k(n)$–duże, to ten kompleks jest CAT(0) dla metryki kawałkami Euklidesowej, dla której krawędzie mają długość 1, zobacz [6]. Chociaż wiele znanych konstrukcji grup systolicznych (na przykład konstrukcja w [6]) daje grupy hiperboliczne w sensie Gromowa, to w ogólności grupy systoliczne nie są hiperboliczne.

Teraz opiszemy pewne egzotyczne własności grup systolicznych. Januszkiewicz i Świątkowski zaobserwowali w [7], że wszystkie pełne podkompleksy kompleksów systolicznych są asferyczne. Ma to następujące konsekwencje. Po pierwsze, dla grup 7–systolicznych (które są hiperboliczne w sensie Gromowa) możemy rozważać brzeg Gromowa. D. Osajda dowiódł w [9], że ten brzeg jest dziedzicznie asferyczny. Oznacza to, w przybliżeniu, że domknięte podprzestrzenie brzegu są asferyczne. Niedawno Świątkowski uzyskał podobny rezultat, udowodnił mianowicie, że dla domkniętej podprzestrzeni F brzegu Gromowa ∂G grupy 7–systolicznej G morfizm indukowany przez inkluzję $F \subset \partial G$ na odpowiednich pro–grupach podstawowych jest monomorfizmem. Zobacz [15] po więcej szczegółów. Obie z wymienionych powyżej własności brzegów są egzotyczne dla przestrzeni topologicznych wymiaru ≥ 2, czyli dla grup wirtualnego wymiaru kohomologicznego ≥ 3.

Innym zastosowaniem asferyczności pełnych podkompleksów kompleksu systolicznego jest uzyskanie własności tzw. asymptotycznej dziedzicznej asferyczności dla grup systolicznych [7]. Należy o niej myśleć jak o zgrubnym odpowiedniku pojęcia dziedzicznej asferyczności omawianego powyżej. Grupy, które są asymptotycznie dziedzicznie asferyczne nie dopuszczają podgrup izomorficznych z grupami podstawowymi zamkniętych rozmaitości riemannowskich wymiaru ≥ 3 o niedodatniej krzywiznie sekcyjnej. W szczególności nie dopuszczają one podgrup, które są wolnymi grupami abelowymi rangi ≥ 3.

2 Rezultaty rozprawy

W tej części omówimy główne rezultaty rozprawy doktorskiej. Zawartość rozprawy, z dokładnością do reorganizacji materiału, pokrywa się z zawartością [10] oraz [11].

Głównym przedmiotem rozprawy jest rozważanie systolicznych odpowiedników następującego twierdzenia o punkcie stałym dla przestrzeni CAT(0). Mianowicie, jeśli X jest zupełną przestrzenią CAT(0), a G skończoną grupą izometrii X, to zbiór punktów stałych G jest niepusty i wypukły, zatem ściągalny (Wniosek 2.8, Rozdział II.2 w [1]). W kontekście systolicznym pytanie brzmi, czy dla każdej skończonej grupy G działającej przez automorfizmy symplicjalne na kompleksie sytolicznym X zbiór punktów stałych tego działania jest niepusty. Podczas gdy dowód twierdzenia o punkcie stałym dla przestrzeni CAT(0) jest dosyć prosty, w kontekście systolicznym jest ono wysoce nietrywialne. W rzeczywistości, jestesmy w stanie otrzymać tylko zgrubny odpowiednik twierdzenia o punkcie stałym dla ogólnych kompleksów systolicznych, który na szczęście wystarcza do zastosowań. Mianowicie, dowodzimy, że dla każdej skończonej grupy G działającej przez automorfizmy symplicjalne na kompleksie systolicznym X istnieje G–niezmienniczy podkompleks X o średnicy ≤ 5. Jako wniosek dowodzimy, że grupy systoliczne zawierają tylko skończenie wiele klas sprzężoności skończonych podgrup.

Natomiast dla lokalnie skończonych kompleksów 7–systolicznych dowodzimy uczciwego twierdzenia o punkcie stałym. Używamy go, aby pokazać, że rodzina grup k–systolicznych, dla $k \geq 7$, jest zakmknięta na amalgamacje i HNN rozszerzenia względem podgrup skończonych. Uczciwe twierdzenie o punkcie stałym dla ogólnych kompleksów systolicznych wydaje się być poza zasięgiem naszych obecnych metod. Dysponujemy pewnymi częściowymi rezultatami, które mogą się okazać przydatne w przyszłości.

Można dalej analizować strukturę zbioru punktów stałych. Dowodzimy mianowicie, że dla dowolnej grupy G działającej przez automorfizmy symplicjalne na kompleksie sytolicznym X, zbiór punktów stałych tego działania jest pusty lub ściągalny. Co więcej, to sformułowanie pozostaje prawdziwe, jeśli zastąpimy kompleks X jego kompleksem Ripsa X_n, dla $n \geq 1$, gdzie X_n otrzymuje się z X poprzez dodanie sympleksów rozpiętych na podzbiorach wierzchołków X średnicy $\leq n$.

Zestawiając nasze zgrubne twierdzenie o punkcie stałym z powyższą alternatywą dla kompleksów Ripsa, otrzymujemy co następuje. Niech G będzie grupą działającą właściwie na kompleksie systolicznym X. To działanie rozszerza się do właściwego działania G na X_n. Wtedy dla $n \geq 5$ zbiór punktów stałych w X_n dla dowolnej skończnej podgrupy grupy G jest zbiorem śiagalnym. CW–kompleksy wyposażone we właściwe działanie grupy G spełniające tę ostatnią włanośc nazywa się modelami dla $\underline{E}G$, zobacz [8]. Wobec tego X_n jest skończenie wymiarowym modelem dla $\underline{E}G$. Co więcej, jeśli działanie G na X jest kozwarte (czyli G jest systoliczna), to X_n jest tzw. skończonym modelem dla $\underline{E}G$.

$\underline{E}G$ jest także nazywana przestrzenią klasyfikującą dla skończonych podgrup (lub dla działań właściwych). Geometria $\underline{E}G$ odpowiada algebraicznym włanościom grupy G, patrz [8]. W szczególności, $\underline{E}G$ pojawia się w sformułowaniu słynnej Hipotezy Baum'a–Connes'a. Co więcej, wśród geometrycznych metod dowodzenia Hipotezy Nowikowa, istnieje metoda przez konstrukcję brzegu modelu dla $\underline{E}G$, zobacz [13]. Brzegi nadające się do tego podejścia muszą posiadać własności podobne do własności brzegów Gromowa grup hiperbolicznych. Jest to obszar obecnych badań D. Osajdy i autora.

Opiszmy w sposób zwarty, jak zorganizowana jest rozprawa doktorska. W części 3 rozdziału I przypominamy podstawowe definicje i własności kompleksów i grup systolicznych.

W rozdziale II dowodzimy, że dla działania grupy skończonej G na systolicznym kompleksie X istnieje G–niezmienniczy podkompleks X średnicy ≤ 5. Wnioskujemy, że grupy systoliczne zawierają tylko skończenie wiele klas sprzężoności skończonych podgrup. Dla lokalnie skończonych kompleksów 7–systolicznych dowodzimy, że istnieje punkt stały działania dowolnej skończonej grupy G. Wnioskujemy, że produkty wolne z amalgamacją (i HNN rozszerzenia) grup 7–systolicznych względem podgrup skończonych są także 7–systoliczne.

W rozdziale III dowodzimy, że zbiór punktów stałych działania dowolnej grupy na kompleksie systolicznym lub jego kompleksie Ripsa jest pusty lub ściagalny. Wnioskujemy, że jeśli grupa G działa w sposób właściwy na kompleksie systolicznym X, to X_n jest skończenie wymiarowym modelem dla $\underline{E}G$ dla $n \geq 5$.

Dziękuję mojemu promotorowi, Jackowi Świątkowskiemu, za postawienie powyższych problemów i za nieustającą pomoc, Tomaszowi Elsnerowi, Fredericowi Haglundowi, Tadeuszowi Januszkiewiczowi i Damianowi Osajdzie za rozmowy, Pawłowi Zawiślakowi za zapoznanie mnie z podejściem będącym treścią Uwagi 5.1, oraz Jolancie Słomińskiej za pokazanie mi metod cytowanych w części 13.

3 Kompleksy systoliczne

Przypomnijmy (za [6]) definicję kompleksu i grupy systolicznej.

Definicja 3.1. Podkompleks K kompleksu symplicjalnego X nazywamy *pełnym* w X, jeśli każdy sympleks w X rozpięty przez wierzchołki z K leży w K. *Uzupełnieniem* podkompleksu $K \subset X$ nazywamy najmniejszy pełny podkompleks X zawierający K. Oznaczamy go przez $\mathrm{span}(K)$. Kompleks symplicjalny X nazywamy *flagowym*, jeśli każdy zbiór jego wierzchołków parami połączonych krawędziami rozpina sympleks w X. Kompleks symplicjalny X nazywamy *k–dużym*, $k \geq 4$, jeśli X jest flagowy i nie ma pełnych podkompleksów będących cyklami długości $< k$, (i.e. X jest flagowy i każda pętla symplicjalna długości $< k$ i ≥ 4 "ma przekątną").

Definicja 3.2. Kompleks symplicjalny X nazywamy *systolicznym*, jeśli jest spójny, jednospójny, oraz linki wszystkich sympleksów X są 6–duże. Grupę G nazywamy *systoliczną*, jeśli działa w sposób kozwarty i właściwy przez automorfizmy symplicjalne na kompleksie systolicznym X. (*Właściwe działanie* oznacza, że X jest lokalnie skończony i że dla każdego zwartego podkompleksu $K \subset X$ zbiór $g \in G$ takich, że $g(K) \cap K \neq \emptyset$ jest skończony.) Jeśli linki wszystkich sympleksów X są dodatkowo k–duże, gdzie $k \geq 6$, nazywamy kompleks (i grupę) *k–systolicznym.*

Przypomnijmy [6], Stwierdzenie 1.4, że kompleksy systoliczne są same 6–duże. W szczególności są flagowe. Co więcej, spójne i jednospójne pełne podkompleksy kompleksów systolicznych (odpowiednio k–systolicznych) są same systoliczne (odpowiednio k–systoliczne). Okazuje się, że kompleks symplicjalny jest k–systoliczny dla $k \geq 6$ wtw kiedy jest spójny, jednospójny i k–duży.

Teraz w sposób zwarty przypomnijmy definicję i własności wypukłych podkompleksów.

Definicja 3.3. Dla lażdej pary podkompleksów (zazwyczaj wierzchołków) A, B kompleksu symplicjalnego X oznaczamy przez $|A, B|$ ($|ab|$ dla wierzchołków $a, b \in X$) kombinatoryczną odległość między $A^{(0)}, B^{(0)}$ w $X^{(1)}$, tzn. w 1–szkielecie X. *Średnicą* $\operatorname{diam}(A)$ nazywamy maksimum wartości $|a_1 a_2|$ po wierzchołkach a_1, a_2 w A.

Podkompleks K kompleksu symplicjalnego X nazywamy *3–wypukłym* jeśli jest pełnym podkompleksem X i dla każdej pary krawędzi ab, bc, takiej że $a, c \in K, |ac| = 2$, mamy $b \in K$. Niepusty podkompleks K kompleksu systolicznego X nazywamy *wypukłym*, jeśli jest spójny i jeśli linki wszystkich sympleksów w K są 3–wypukłymi podkompleksami linków tych sympleksów w X.

W Lemacie 7.2 w [6] autorzy otrzymują, że wypukłe podkompleksy kompleksu systolicznego X są ściągalne, pełne i 3–wypukłe w X. Dla podkompleksu $Y \subset X$, $n \geq 0$, *kombinatoryczną kulą* $B_n(Y)$ o promieniu n wokół Y nazywamy uzupełnienie $\{p \in X^{(0)} \colon |p, Y| \leq n\}$. (Podobnie $S_n(Y) = \operatorname{span}\{p \in X^{(0)} \colon |p, Y| = n\}$.) Jeśli Y jest wypukły (w szczególności, jeśli Y jest sympleksem) to $B_n(Y)$ jest też wypukła, jak dowiedziono w [6], Wniosek 7.5. Przecięcie rodziny wypukłych podkompleksów jest wypukłe i definiujemy *uwypuklenie* podkompleksu $Y \subset X$ jako przecięcie wszystkich wypukłych podkompleksów X zawierających Y. Oznaczamy uwypuklenie Y przez $\operatorname{conv}(Y)$.

Praca [5] F. Haglunda and J. Świątkowskiego zawiera dowód następującego stwierdzenia (Stwierdzenie 4.9), jest wykorzystywane w rozprawie.

Stwierdzenie 3.4. *Niepusty pełny podkompleks Y kompleksu systolicznego X jest wypukły wtedy i tylko wtedy kiedy $Y^{(1)}$ jest geodezyjnie wypukły w $X^{(1)}$ (i.e. kiedy wszystkie geodezyjne w $X^{(1)}$ łączace wierzchołki z Y są zawarte w $Y^{(1)}$).*

Bibliografia

[1] M. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non–Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer, 1999.

[2] T. Elsner, *Flats and flat torus theorem in systolic spaces*, wysłana do publikacji.

[3] ———, *Isometries of systolic spaces*, w przygotowaniu.

[4] F. Haglund, *Complexes simpliciaux hyperboliques de grande dimension*, Prepublication Orsay **71** (2003), preprint.

[5] F. Haglund and J. Świątkowski, *Separating quasi–convex subgroups in 7–systolic groups*, Groups, Geometry and Dynamics, ukaże się.

[6] T. Januszkiewicz and J. Świątkowski, *Simplicial Nonpositive Curvature*, Publ. Math. IHES **104** (2006), no. 1, 1–85.

[7] ———, *Filling invariants of systolic complexes and groups*, Geometry & Topology **11** (2007), 727–758.

[8] W. Lück, *Survey on Classifying Spaces for Families of Subgroups*, Geometric, Combinatorial and Dynamical Aspects of Infinite Groups, Progress in Mathematics, vol. 248, Birkhäuser, 2005.

[9] D. Osajda, *Ideal boundary of 7–systolic complexes and groups*, wysłana do publikacji.

[10] P. Przytycki, *Systolic Groups Acting on Complexes with no Flats are Hyperbolic*, Fund. Math. **193** (2007), 277–283.

[11] ———, *The fixed point theorem for simplicial nonpositive curvature*, Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society, ukaże się.

[12] ———, $\underline{E}G$ *for systolic groups*, wysłana do publikacji.

[13] D. Rosenthal, *Split injectivity of the Baum–Connes assembly map*, available at `arXiv:math/0312047`.

[14] G. Segal, *Classifying spaces and spectral sequences*, Publ. Math. IHES **34** (1968), 105–112.

[15] J. Świątkowski, *Gromov boundaries of 7–systolic groups are pro–π_1–saturated*, w przygotowaniu.

[16] P. Scott and T. Wall, *Topological methods in group theory*, Homological Group Theory, London Math. Soc. Lecture Notes Series, vol. 36, 1979, pp. 137–214.