Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Dominika Pawlik

Brzegi Gromowa grup hiperbolicznych jako granice odwrotne ciągów wielościanów

rozprawa doktorska

Promotor

prof. dr hab. Jacek Świątkowski
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Wrocławskiego

Promotor pomocniczy

dr Damian Osajda
Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk

październik 2014

Oświadczenie autora rozprawy:
oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

. . . .

data *Dominika Pawlik*

Oświadczenie promotora rozprawy:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

. . . .

data *prof. dr hab. Jacek Świątkowski*

Oświadczenie promotora pomocniczego:
niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

. . . .

data *dr Damian Osajda*

W niniejszej pracy zajmujemy się brzegami Gromowa grup hiperbolicznych, konstruując dla nich przedstawienia typu kombinatorycznego, które pozwalają na opisanie w rekurencyjny sposób topologii ∂G poprzez różnego rodzaju struktury skończone.

Naszym głównym celem (twierdzenie 0.1) będzie przedstawienie brzegu Gromowa ∂G z dokładnością do homeomorfizmu jako kompaktu Markowa (definicja 1.9). Pojęcie kompaktu Markowa zostało wprowadzone w [4] przez Dranishnikova (według którego zasadnicza idea pochodzi od Gromowa) i odnosi się do granic odwrotnych ciągów wielościanów z dodatkowymi warunkami regularności. Istnienie takiej prezentacji jest ogólnie znane ([8], [10]), jednak wydaje się, że do tej pory nie podano jego dowodu.

Badanie przedstawień tego typu można postrzegać — ze względu na kombinatoryczną naturę kompaktów Markowa — jako krok w kierunku klasyfikacji przestrzeni będących brzegami grup hiperbolicznych. Chociaż wszystkie brzegi grup są kompaktami Markowa, zdanie przeciwne jest w jasny sposób fałszywe, ponieważ pojęcie kompaktu Markowa zezwala na całkowity brak topologicznego podobieństwa pomiędzy dwoma wybranymi otoczeniami, podczas gdy brzeg ∂G musi być niemal jednorodny (orbity działania G są gęste). Prowadzi to w naturalny sposób do pytania o warunki konieczne lub dostateczne, aby dany system odwrotny z własnością Markowa zadawał kompakt homeomorficzny z brzegiem pewnej grupy hiperbolicznej.

Jako że tematyka kompaktów Markowa nie jest szeroko badana, pytanie to w dużej mierze pozostaje otwarte, niemniej pewne kryteria zostały już dowiedzione lub zostały postawione jako hipotezy. W pracy [9] określono pewną klasę spośród *drzew rozmaitości*, stanowiącą szczególny rodzaj kompaktów Markowa, i wykazano, że są one wszystkie brzegami grup hiperbolicznych. Z drugiej strony, w [4] wykazano, że istnieją kompakty Markowa o wymiarze kohomologicznym 1 nad $\mathbb{Q}$ i równocześnie dowolnie wysokim nad $\mathbb{Z}$, podczas gdy Mladen Bestvina przypuszcza, że nie może tak być dla brzegów grup; taki wniosek wyniknąłby również (przynajmniej w przypadku beztorsyjnym) z negatywnej odpowiedzi w problemie Davisa (numer 4) na liście [8]. Ta sama lista zawiera również analogiczny problem dla grup Coxetera, postawiony przez Dranishnikova (numer 10). Z omawianym zagadnieniem wiąże się też podany we wstępie pracy [10] postulat stworzenia pojęcia stopnia złożoności topologicznej, który odróżniałby drzewa rozmaitości (i ogólniej, określone w [10] *drzewa wielościanów*) od ogólnych kompaktów Markowa, oraz (co dla nas najciekawsze) zbadania, jak w takiej hierarchii złożoności prezentowałyby się brzegi grup hiperbolicznych.

W tym kontekście naturalne wydaje się również poszukiwanie przedstawień brzegów grup jako kompaktów Markowa wyznaczonych przez systemy odwrotne z jak najsilniejszymi dodatkowymi własnościami, poczynając od intuicyjnie spodziewanej własności rozdrabniania (definicja 1.10), poprzez najprostszą jednorodność wyrażoną w jednakowym wymiarze wszystkich maksymalnych sympleksów, a kończąc na rozmaitych symplicjalnych analogiach topologicznej jednorodności ∂G, zapewnionej przez działanie grupy G. Niniejsza praca zawiera pewne wyniki zmierzające w tym kierunku, które pozwalają przypuszczać, że na kompaktach Markowa reprezentujących brzegi grup można wymusić różnego rodzaju nietrywialne warunki o takim charakterze.

Organizacja pracy

Główny wynik pracy brzmi następująco:

Twierdzenie 0.1. *Brzeg Gromowa ∂G dowolnej grupy hiperbolicznej G ma z dokładnością do homeomorfizmu strukturę kompaktu Markowa z własnością rozdrabniania (definicja 1.10).*

Właściwy dowód twierdzenia 0.1 podajemy w rozdziałach 3 i 4, po uprzednich przygotowaniach.

Rozdział 1 gromadzi definicje oraz najważniejsze własności kluczowych dla nas obiektów takich, jak grupy hiperboliczne, geodezyjne, oraz brzeg Gromowa. Podajemy w nim również definicję kompaktu Markowa wraz z istotnymi dla nas wzmocnieniami. W rozdziale 2 przywołujemy na podstawie [2] teorię typów stożkowych i kulowych w grupach hiperbolicznych, która będzie stanowić jedno z podstawowych narzędzi w naszych rozumowaniach. Podamy też dowody prostych faktów pomocniczych, związanych z tymi typami.

Rozdział 3 poświęcony jest przedstawieniu brzegu ∂G jako granicy odwrotnej ciągu wielościanów; skorzystamy tu z twierdzenia 3.2 zasadniczo pochodzącego z [6], które pozwala na zbudowanie takiego przedstawienia na podstawie odpowiedniego ciągu pokryć otwartych ∂G. W rozdziale 3.2 określimy *quasi-niezmiennicze systemy pokryć* (definicja 3.8), zapewniające w szczególności wykonalność owej konstrukcji (co sprawdzimy w rozdziale 3.4), a ponadto dodatkowe własności regularności, przydatne w późniejszych rozdziałach. Natomiast w rozdziale 3.3 skonstruujemy system pokryć przestrzeni ∂G spełniający owe własności.

W rozdziale 4 sprawdzimy, że system odwrotny otrzymany z twierdzenia 3.2 dla systemu quasi-niezmienniczego spełnia warunki definicji 1.9, tym samym zamykając dowód twierdzenia 0.1.

Celem rozdziału 6 jest podanie innego opisu kombinatorycznego ∂G o charakterze rekurencyjnym, zdefiniowanego w [3] jako *przestrzeń semi-markowowska* (intuicyjnie jest to mocniejszy analog automatyczności grupy; patrz definicja 6.5). Stanowi to uogólnienie głównego rezultatu z [3], gdzie rozpatrywany jest tylko przypadek grup hiperbolicznych beztorsyjnych. Nasze rozumowanie w ogólnym zarysie opiera się na dowodzie z [3]; kluczowe modyfikacje wiążą się ze wzmacnianiem typów kulowych w G, które opisujemy w rozdziałach 5 i 6.4.

W kolejnych dwóch rozdziałach powracamy do tematu kompaktów Markowa, starając się dobrać system odwrotny z własnością Markowa reprezentujący ∂G tak, by jego własności symplicjalne jak najwierniej odzwierciedlały wybrane własności topologiczne samego brzegu grupy. W rozdziale 7 wykazujemy, że można ograniczyć wymiar kompleksów w owym systemie przez wymiar brzegu grupy. Natomiast w rozdziale 8 usiłujemy uchwycić w strukturze systemu odwrotnego analogi wybranych własności samopodobieństwa brzegu (gęstość orbit przy działaniu G oraz homeomorficzność bardzo dużych i bardzo małych podzbiorów otwartych). Cel ten osiągniemy w zamian za dopuszczenie pojedynczej *osobliwości* w poprawionej strukturze (definicja 8.6), która jednak okaże się wciąż dopuszczać opis kombinatoryczny o charakterze skończonym.

Podziękowania

Bardzo dziękuję moim promotorom Jackowi Świątkowskiemu i Damianowi Osajdzie za zaproponowanie tematyki, rady i inspirujące rozmowy oraz dużą życzliwość, a także Olkowi Zabłockiemu za bycie pierwszym słuchaczem i ostatnim korektorem.

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Przestrzenie i grupy hiperboliczne

Definicja 1.1. Przestrzeń metryczną X z metryką d oraz wybranym punktem bazowym e nazwiemy *δ-hiperboliczną*, jeśli dla dowolnej trójki punktów $x, y, z \in X$ zachodzi nierówność

$$(x, y) \geq \min\big((x, z),\ (z, y)\big) - \delta,$$

gdzie wyrażenie

$$(x, y) = \tfrac{1}{2}\big(d(x, e) + d(y, e) - d(x, y)\big)$$

nazywamy *produktem Gromova* punktów x, y.

Ponadto wartość $d(x, e)$ będziemy oznaczać $|x|$ i nazywać *długością* elementu x.

Definicja 1.2. Skończenie generowaną grupę G z wybranym zbiorem generatorów S będziemy utożsamiać z jej *grafem Cayleya* $\Gamma(G, S)$, w którym:

- wierzchołki utożsamiamy z elementami grupy G;
- wierzchołki $g \neq h$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $g^{-1}h$ lub gh^{-1} należy do S.

W grafie tym rozważamy naturalną metrykę (zadaną przez najkrótszą długość krzywej łączącej dwa punkty, przy założeniu, że każda krawędź jest izometryczna z odcinkiem jednostkowym). W szczególności odległość między dwoma wierzchołkami w sensie takiej metryki jest taka sama, jak w sensie teorii grafów (ilość krawędzi na najkrótszej łączącej ścieżce).

Definicja 1.3. *Geodezyjną* w grafie Cayleya $\Gamma(G, S)$ nazywamy formalnie izometryczne włożenie w $\Gamma(G, S)$ jednej z przestrzeni

$$\mathbb{R}, \qquad \mathbb{R}^+, \qquad [0, n].$$

Uwaga 1.4. W praktyce, ponieważ interesują nas głównie elementy G, czyli wierzchołki w $\Gamma(G, S)$, będziemy traktować geodezyjne jako izometryczne zanurzenia odpowiednio $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ lub $\{0, \ldots, n\}$ w zbiór wierzchołków, które z kolei będziemy opisywać jako ciągi o odpowiednich zbiorach indeksów. (Takie "geodezyjne dyskretne" pozostają oczywiście w jednoznacznej odpowiedniości z "geodezyjnymi ciągłymi" γ takimi, że $\gamma(0)$ jest wierzchołkiem w $\Gamma(G, S)$).

Oznaczenie 1.5. *Dla $x, y \in G$ symbolem $[x, y]$ oznaczymy dowolną skończoną geodezyjną o końcach w x oraz y (nie musi ona być jedyna).*

Uwaga 1.6. W niniejszej pracy będziemy rozpatrywać skończenie generowaną grupę G wraz z wybranym i ustalonym zbiorem generatorów S, dla uproszczenia notacji utożsamiając grupę G z grafem Cayleya $\Gamma(G, S)$.

W szczególności, zakładając, że G jest δ-*hiperboliczna*, będziemy mieć na myśli δ-hiperboliczność grafu $\Gamma(G, S)$. Dla ustalenia uwagi i bez straty ogolności przyjmiemy, że δ jest całkowita i dodatnia. Analogicznie należy rozumieć pojęcie *geodezyjnej* w G, *długości* elementu G itp. Również stwierdzenia, że dana wielkość "zależy jedynie od G", należy rozumieć tak, że może ona zależeć od wyboru zbioru generatorów S.

Definicja 1.7. Przez $G^{\mathbb{N}}$ oznaczmy zbiór (jednostronnie nieskończonych) ciągów elementów G. Dla zadanej grupy hiperbolicznej G niech $Geo \subseteq G^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem ciągów wyznaczających geodezyjną w G. Zdefiniujmy w Geo relację bliskości $\sim$:

$$(x_n) \sim (y_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists_{C>0}\, \forall_{n\geq 0}\; d(x_n, y_n) < C.$$

Wiadomo, że $\sim$ jest relacją równoważności. *Brzegiem* (Gromova) grupy G (oznaczenie: ∂G) nazywamy zbiór ilorazowy $Geo/\sim$. (Poniżej wprowadzamy na nim topologię oraz potrzebne nam własności metryczne).

Dla dowolnego ciągu $(x_n) \in Geo$ jego klasę abstrakcji $[(x_n)] \in Geo/\sim\; = \partial G$ nazywamy *granicą* geodezyjnej (x_n); mówimy także, że (x_n) *łączy* e z $[(x_n)]$. Powiemy także, że geodezyjna obustronnie nieskończona geodezyjna $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *łączy* punkty $[(y_n)_{n\geq 0}]$ i $[(y_{-n})_{n\geq 0}]$.

Definicja 1.8. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a > 1$ określamy w ∂G *funkcję odległości z parametrem* a wzorem

$$d\big([(x_n)], [(y_n)]\big) = a^{-l},$$

gdzie l jest największą możliwą odległością między e, a dowolną geodezyną łączącą x_n z y_n. Pomijamy w notacji parametr a, ponieważ będzie on zawsze ustalony.

Z rozdziału 1.4 w [3] wiemy, że istnieje $a_0 > 1$ takie, że dla dowolnego $1 < a < a_0$ istnieje *metryka wizualna* na G (oznaczenie: d_v; ponownie pominiemy w notacji parametr a) taka, że:

- określona powyżej funkcja odległości (z parametrem a) jest bi-lipschitzowsko równoważna z metryką wizualną z tym samym parametrem a;
- topologia zadana na ∂G przez metrykę wizualną z parametrem a (a więc też przez naszą funkcję odległości) nie zależy od wyboru a.

Przestrzeń ∂G będziemy rozpatrywać z topologią opisaną w powyższym punkcie. Wiadomo, że ∂G jest w tej topologii zwarta, z czego będziemy kilkakrotnie korzystać.

1.2 Kompakty Markowa

Definicja 1.9 ([4, definicja 1.1])**.** Przestrzeń topologiczną V nazywamy *kompaktem Markowa*, jeśli jest granicą systemu odwrotnego przestrzeni K_i i odwzorowań $f_i : K_{i+1} \to K_i$ dla $i \geq 0$, posiadającego *własność Markowa*, to znaczy spełniającego warunki:

(i) K_i są skończonymi kompleksami symplicjalnymi, spełniającymi $\sup \dim K_i < \infty$;

(ii) dla każdego sympleksu σ w K_{i+1} obraz $f_i(\sigma)$ zawiera się w pojedyńczym sympleksie należącym do K_i oraz obcięcie $f_i|_\sigma$ jest przekształceniem afinicznym;

(iii) sympleksom w $\amalg K_i$ można przyporządkować skończenie wiele *typów* tak, by dla dowolnych sympleksów $s \in K_i$ i $s' \in K_j$ tego samego typu istniały izomorfizmy kompleksów $i_k : (f_i^{i+k})^{-1}(s) \to (f_j^{j+k})^{-1}(s')$ dla $k \geq 0$ takie, że poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} s \arrow[d, "i_0"'] & f_i^{-1}(s) \arrow[l, "f_i"'] \arrow[d, "i_1"'] & \dots \arrow[l] & (f_i^{i+k})^{-1}(s) \arrow[l] \arrow[d, "i_k"'] & (f_i^{i+k+1})^{-1}(s) \arrow[l, "f_{i+k}"'] \arrow[d, "i_{k+1}"'] & \dots \arrow[l] \\ s' & f_j^{-1}(s') \arrow[l, "f_j"'] & \dots \arrow[l] & (f_j^{j+k})^{-1}(s') \arrow[l] & (f_j^{j+k+1})^{-1}(s') \arrow[l, "f_{j+k}"'] & \dots \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

gdzie f_b^a (dla $a \geq b$) oznacza złożenie $f_b \circ f_{b+1} \circ \ldots \circ f_{a-1} : K_a \to K_b$.

Definicja 1.10 (cf. [4, lemat 2.3])**.**

(a) Ciąg $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$ rodzin podzbiorów zwartej przestrzeni metrycznej X ma *własność rozdrabniania*, jeśli

$$\lim_{n \to \infty} \max_{A \in \mathcal{A}_n} \operatorname{diam} A = 0.$$

(b) Kompakt Markowa X ma *własność rozdrabniania*, jeśli w definicji 1.9 można dobrać system odwrotny (K_n, f_n) tak, by dla dowolnego $i \geq 0$ ciąg $(\mathcal{F}_n)_{n \geq i}$ rodzin podzbiorów przestrzeni K_i miał własność rozdrabniania, gdzie

$$\mathcal{F}_n = \left\{ f_i^n(\sigma) \;\middle|\; \sigma \text{ jest sympleksem w } K_n \right\}.$$

Uwaga 1.11. Definicję 1.10a można równoważnie sformułować w następujący (czysto topologiczny) sposób: dla dowolnego pokrycia otwartego $\mathcal{U}$ przestrzeni X istnieje takie $n \geq 0$, że dowolny zbiór $A \in \mathcal{A}_n$ zawiera się w pewnym zbiorze $U \in \mathcal{U}$.

Wynika stąd w szczególności, że znaczenie definicji 1.10b nie zależy od wyboru metryki (zgodnej z topologią) w kompleksie K_i.

Definicja 1.12. Kompakt Markowa X zadany przez system (K_i, f_i) nazwiemy *barycentrycznym*, jeśli dla każdego $i \geq 0$ wierzchołki z kompleksu K_{i+1} przechodzą przy przekształceniu f_i w wierzchołki podziału barycentrycznego kompleksu K_i.

Definicja 1.13. Kompakt Markowa X zadany przez system (K_i, f_i) nazwiemy *właściwym*, jeśli dla każdego $i \geq 0$ oraz sympleksu $s \in K_i$ wszystkie sympleksy w przeciwobrazie $f_i^{-1}(s)$ mają parami różne typy.

Uwaga 1.14. Ważną motywacją dla powyższych dwóch definicji jest spostrzeżenie, że właściwe i barycentryczne kompakty Markowa są *skończenie opisywalne*. Konkretniej, jeśli system $(K_i, f_i)_{i \geq 0}$ spełnia warunki z definicji 1.9, 1.12 i 1.13, oraz jeśli N jest tak duże, że kompleksy $K_0, \ldots, K_N$ zawierają sympleksy wszystkich możliwych typów, to cały system $(K_i, f_i)_{i=0}^{\infty}$ można odtworzyć na podstawie podsystemu początkowego (skończenie opisywalnego ze względu na barycentryczność):

$$K_0 \xleftarrow{f_0} K_1 \xleftarrow{f_1} \ldots \xleftarrow{f_{N-1}} K_N \xleftarrow{f_N} K_{N+1}.$$

Uzasadnienie jest indukcyjne: dla dowolnego $n \geq N+1$ kompleks K_{n+1} wraz z odwzorowaniem $f_n : K_{n+1} \to K_n$ jest wyznaczony jednoznacznie przez podsystem $K_0 \longleftarrow \ldots \longleftarrow K_n$. Jest tak, gdyż:

- dla dowolnego sympleksu $s \in K_n$ istnieje sympleks wzorcowy $\sigma \in K_m$ tego samego typu, gdzie $m < n$, a wówczas przeciwobraz $f_n^{-1}(s)$ wraz z typami sympleksów oraz obcięciem $f_n\big|_{f_n^{-1}(s)}$ jest wyznaczony przez przeciwobraz $f_m^{-1}(\sigma)$ oraz obcięcie $f_m\big|_{f_m^{-1}(\sigma)}$, które są już nam znane (co wynika z samej definicji 1.9);
- dla dowolnej pary sympleksów $s' \subseteq s \in K_n$ wybór włożenia $f_n^{-1}(s') \to f_n^{-1}(s)$ jest całkowicie wyznaczony przez fakt, że wierzchołki w $f_n^{-1}(s)$ mają parami różne typy (na mocy definicji 1.13);
- ponieważ kompleks K_{n+1} jest sumą rodziny przeciwobrazów postaci $f_n^{-1}(s)$ dla $s \in K_n$, która jest zamknięta na przecięcia, znajomość owych przeciwobrazów oraz włożeń pomiędzy nimi pozwala jednoznacznie odtworzyć K_{n+1}; oczywiście łącząc wyznaczone obcięcia odtwarzamy również f_n.

Rozdział 2

Typy elementów grupy

Celem tego rozdziału jest zaznajomienie czytelnika z własnościami typów stożkowych (definicja 2.4) i kulowych (definicja 2.12) elementów grupy w zakresie potrzebnym w dalszych rozdziałach pracy.

Związek między typami stożkowymi (opisującymi naturalnie strukturę grupy oraz jej brzegu) a kulowymi (stanowiącymi w oczywisty sposób informację skończoną) w grupie G został opisany po raz pierwszy w [1] w celu opisania własności funkcji wzrostu w grupie. Wynik ten okazuje się istotnym narzędziem w uzyskiwaniu różnych skończonych prezentacji brzegu Gromova: w [2] wykorzystano go do określenia struktury automatycznej ∂G, zaś w [3] do przedstawienia ∂G jako przestrzeni semi-markowowskiej w przypadku beztorsyjnym (co uogólnimy w rozdziale 6). Nie zaskakuje więc wykorzystanie go przez nas do zbudowania na przestrzeni ∂G struktury kompaktu Markowa.

2.1 Własności geodezyjnych w G

Fakt 2.1. *Niech $\alpha = [e, x]$ i $\beta = [e, y]$, przy czym $|x| = |y| = n$ oraz $d(x, y) = k$. Wówczas dla $0 \leq m \leq n$ zachodzi*

$$d\big(\alpha(m), \beta(m)\big) \;\leq\; 8\delta + \max\big(k + 8\delta - 2(n-m),\, 0\big).$$

W szczególności dla $0 \leq m \leq n - \frac{k}{2} - 4\delta$ zachodzi $d(\alpha(m), \beta(m)) \leq 8\delta$.

Dowód. Rozważmy punkty $\alpha(m), \beta(m)$ leżące na bokach 4δ-wąskiego trójkąta geodezyjnego $[e, x, y]$. Rozpatrujemy dla nich trzy przypadki.

Jeśli $\alpha(m)$ leży w odległości co najwyżej 4δ od β, to mamy $d(\alpha(m), \beta(m')) \leq 4\delta$ dla pewnego m'; wówczas z nierówności trójkąta w trójkącie $[e, \alpha(m), \beta(m')]$ wnioskujemy, że $|m' - m| \leq 4\delta$, a więc

$$d(\alpha(m), \beta(m)) \leq d(\alpha(m), \beta(m')) + |m' - m| \leq 8\delta,$$

skąd wynika teza.

Jeśli $\beta(m)$ leży w odległości co najwyżej 4δ od α, rozumujemy analogicznie.

Do rozważenia pozostaje przypadek, gdy $\alpha(m)$, $\beta(m)$ są odległe o co najwyżej 4δ odpowiednio od pewnych $a, b \in [x, y]$. Wówczas $|a|, |b| \leq m + 4\delta$, co oznacza, że punkty a, b są odległe przynajmniej o $D = n - m - 4\delta$ od obu końców odcinka $[x, y]$. Stąd $d(a, b) \leq k - 2D$, a zatem

$$d\big(\alpha(m), \beta(m)\big) \leq d\big(\alpha(m), a\big) + d(a, b) + d\big(b, \beta(m)\big) \leq 8\delta + k - 2D = 16\delta + k - 2(n-m). \qquad \square$$

Wniosek 2.2. *Niech $\alpha = [e, x]$ i $\beta = [e, y]$, przy czym $|x| = n$ oraz $d(x, y) = k$. Wówczas dla $0 \le m \le \min(n, |y|)$ zachodzi*

$$d\big(\alpha(m), \beta(m)\big) \;\le\; 8\delta + \max\big(2k + 8\delta - 2(n-m),\, 0\big).$$

Dowód. Zauważmy, że z nierówności trójkąta mamy $\big|n - |y|\big| = \big||x| - |y|\big| \le k$. Niech $n' = \min(n, |y|)$; twierdzimy, że $d(\alpha(n'), \beta(n')) \le 2k$. Istotnie: jeśli $n' = n$, mamy

$$d(\alpha(n'), \beta(n')) \le d(x, y) + d(y, \beta(n)) \le k + \big||y| - n\big| \le 2k,$$

zaś w przeciwnym razie $n' = |y|$ i wobec tego

$$d(\alpha(n'), \beta(n')) \le d(\alpha(|y|), x) + d(x, y) \le \big||y| - n\big| + k \le 2k.$$

Pozostaje zastosować fakt 2.1 dla geodezyjnych α, β obciętych do odcinka $[0, n']$ oraz podwojonej wartości k. □

Fakt 2.3. *Niech $(\alpha_k)_{k\ge 0}$ będzie ciągiem geodezyjnych w G, rozpoczynających się w e. Oznaczmy $x_k = \lim_{n\to\infty} \alpha_k(n)$. Wówczas istnieje podciąg $(\alpha_{k_i})_{i\ge 0}$ oraz geodezyjna α_∞ taka, że α_{k_i} pokrywa się z α_∞ na odcinku $[0, i]$. Co więcej, punkt $x_\infty = \lim_{n\to\infty}$ jest granicą ciągu (x_{k_i}).*

Dowód. Pierwsza część tezy wynika z prostego argumentu przekątniowego: ponieważ dla każdego $n \ge 0$ zbiór $\{x \in G \,|\, |x| \le n\}$ jest skończony, zbiór możliwych obcięć $\{\alpha_k\big|_{[0,n]} \,|\, k \ge 0\}$ również musi być skończony. Pozwala to określić indukcyjnie α_∞: przyjmujemy $\alpha_\infty(0) = e$, a następnie dla kolejnych $n > 0$ dobieramy $\alpha_\infty(n)$ tak, by α_∞ było zgodne na odcinku $[0, n]$ z nieskończenie wieloma spośród α_k. Taki wybór jest zawsze możliwy i gwarantuje istnienie podciągu (α_{k_i}).

Otrzymany ciąg α_∞ jest geodezyjną, ponieważ każdy jego odcinek początkowy $\alpha_\infty\big|_{[0,i]}$ pokrywa się z odcinkiem początkowym geodezyjnej $\alpha_{k_i}\big|_{[0,i]}$. (Zauważmy, że możemy przy tym wymagać, aby ciąg (k_i) był rosnący). W tej sytuacji z lematu 5.2.1 w [3] oraz definicji 1.8 wynika, że w brzegu ∂G zachodzi $x_\infty = \lim_{i\to\infty} x_{k_i}$. Z drugiej strony, mamy $\gamma_\infty(k) = g$, a więc $x = [\gamma_\infty] \in \mathrm{span}(g)$. □

2.2 Typy stożkowe i ich odpowiedniki w ∂G

Definicja 2.4 (por. [2])**.** Typ stożkowy $T^c(x)$ elementu $x \in G$ określamy jako zbiór $y \in G$ takich, że istnieje geodezyjna prowadząca z e do xy przechodząca przez x.

Elementy zbioru $xT^c(x)$ będziemy nazywać *potomkami* elementu x.

Fakt 2.5 ([2, rozdział 12.3])**.** *Relacja potomności jest przechodnia: jeśli $y \in T^c(x)$ i $w \in T^c(xy)$, to $yw \in T^c(x)$.*

Fakt 2.6. *Jeśli $y \in T^c(x)$, to typ stożkowy $T^c(xy)$ jest wyznaczony przez $T^c(x)$ oraz y.*

Dowód. Wynika to z wielokrotnego zastosowania lematu 12.4.3 w [2]. Z tym zastrzeżeniem, że w dowodzie tego lematu należy poprawić literówkę, definiując σ'' jako odcinek geodezyjny prowadzący z e do $\gamma' xy$ przez γ'. □

Definicja 2.7. *Zasięgiem* elementu $g \in G$ (ozn. $\mathrm{span}(g)$) jest zbiór takich $x \in \partial G$, że istnieje geodezyjna z e do x przechodząca przez g.

Fakt 2.8. *Zbiór* span(g) *jest domknięty.*

Dowód. Niech $|g| = k$ i niech x_i będzie ciągiem w span(g) zbieżnym do pewnego $x \in \partial G$. Pokażemy, że x jest również w span(g). Niech γ_i będzie geodezyjną w G wychodzącą z e, zbiegającą do x_i i taką, że $\gamma_i(k) = g$. Na mocy faktu 2.3 istnieje podciąg (γ_{i_j}), który staje się coraz bardziej zgodny z pewną geodezyjną γ_∞; w szczególności mamy $\gamma_\infty(0) = e$ oraz $\gamma_\infty(k) = g$. Ponadto fakt 2.3 zapewnia, że punkt $[\gamma_\infty] \in \partial G$ jest granicą ciągu x_{i_j}, czyli jest równy x. To zaś oznacza, że $x \in$ span(g). □

Fakt 2.9. *Dla dowolnego $g \in G$,* span(g) *jest zbiorem granic w ∂G wszystkich promieni geodezyjnych w G wychodzących z g i zawartych w $gT^c(g)$.*

Dowód. Oznaczmy $|g| = k$. Niech α będzie promieniem geodezyjnym wychodzącym z g i zawartym w $gT^c(g)$. Z definicji zbioru $T^c(g)$ wynika, że dla dowolnego $n > 0$ zachodzi $|\alpha(n)| = n+k$. To oznacza z kolei, że dla dowolnej geodezyjnej β łączącej e z g krzywa $\beta \cup \alpha$ jest geodezyjną, ponieważ dla dowolnego $m > k$ jej obcięcie do odcinka $[0, m]$ łączy punkty e oraz $\alpha(m-k)$ odległe od siebie właśnie o m. W takim razie $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = \lim_{m\to\infty} \beta(m)$ należy do span(g).

Zawieranie przeciwne jest oczywiste. □

Ustalmy (w zależności od grupy G) stałą $a > 1$ użytą w definicji metryki wizualnej na ∂G (patrz [3, rozdz. 1.4]).

Fakt 2.10. *Niech $g \in G$. Jeśli $|g| = n$, to* $\operatorname{diam}\operatorname{span}(g) \le C \cdot a^{-n}$, *gdzie C jest stałą zależną jedynie od G.*

Dowód. Niech $x, y \in$ span(g) i niech α, β będą geodezyjnymi prowadzącymi z e poprzez g odpowiednio ku x oraz y. Na mocy lematu 12.3.1 w [2] ścieżka $\overline{\beta}$, zbudowana poprzez połączenie obcięć $\alpha\big|_{[0,n]}$ i $\beta\big|_{[n,\infty)}$, jest geodezyjną, oczywiście zbieżną do y. Z drugiej strony, $\overline{\beta}$ na odcinku $[0, n]$ pokrywa się z α. Wówczas, jeśli γ jest nieskończoną geodezyjną łączącą x z y, na mocy lematu 5.2.1 w [3] mamy $d(e, \gamma) \ge n - 12\delta$, co na mocy definicji 1.8 kończy dowód. □

2.3 N-typy kulowe

Oznaczenie 2.11. *Dla dowolnego $x \in G$ oraz $r > 0$ przez $B_r(x)$ oznaczamy zbiór $\{y \in G \,|\, d(x, y) \le r\}$.*

Definicja 2.12 ([2, rozdział 12])**.** Niech $x \in G$ oraz $N > 0$. *N-typem kulowym* elementu x (ozn. $T_N^b(x)$) nazywamy funkcję $f_{x,N}^b : B_N(e) \to \mathbb{Z}$, określoną wzorem

$$f_{x,N}^b(y) = |xy| - |x|. \tag{2.1}$$

Lemat 2.13 ([2, lemat 12.3.3])**.** *Istnieje stała N_0 zależna tylko od G taka, że dla dowolnych $N \ge N_0$ oraz $x, y \in G$ z równości $T_N^b(x) = T_N^b(y)$ wynika równość $T^c(x) = T^c(y)$.*

Fakt 2.14. *Niech $x, y \in G$, $N, k > 0$ oraz $|y| \le k$. Wówczas $T_N^b(xy)$ zależy wyłącznie od $T_{N+k}^b(x)$, y oraz N.* □

Dowód. Niech f, f' oznaczają odpowiednio funkcje $(N + k)$-typu dla x oraz N-typu dla xy. Niech $z \in B_N(e)$. Wówczas zarówno yz, jak y należą do $B_{N+k}(e)$, czyli dziedziny funkcji f, przy czym

$$f'(z) = |xyz| - |xy| = |xyz| - |x| - (|xy| - |x|) = f(yz) - f(y).$$ □

Lemat 2.15. *Niech N_0 oznacza stałą z lematu 2.13. Niech $N > N_0 + 8\delta$, $M \geq 0$, $x \in G$ oraz $y \in T^c(x)$, gdzie $|y| \geq M + 4\delta$. Wówczas $T^b_M(xy)$ zależy wyłącznie od $T^b_N(x)$, y oraz N, M.*

Zwracamy uwagę, że wartość $M \geq 0$ w lemacie jest zupełnie dowolna.

Dowód. Niech $x, x' \in G$ będą takie, że $T^b_N(x) = T^b_N(x')$. Oznaczmy $n = |x|$.

Niech $z \in B_M(e)$. Należy wykazać, że

$$|xyz| - |xy| = |x'yz| - |x'y|. \tag{2.2}$$

Niech α, β będą geodezyjnymi łączącymi e odpowiednio z xy oraz xyz, przy czym możemy założyć, że α przechodzi przez x. Oznaczmy $w = x^{-1}\beta(n)$. Ponieważ $n \leq |xy| - \frac{2M}{2} - 4\delta$, stosując wniosek 2.2 dla geodezyjnych α, β otrzymujemy

$$|w| = d(x, xw) = d(\alpha(n), \beta(n)) \leq 8\delta.$$

Wobec tego z równości $T^b_N(x) = T^b_N(x')$ wynika na mocy faktu 2.14 $T^b_{N-8\delta}(xw) = T^b_{N-8\delta}(x'w)$. Korzystając z lematu 2.13 otrzymujemy

$$T^c(x) = T^c(x'), \qquad T^c(xw) = T^c(x'w),$$

przy czym do pierwszego zbioru należy y, zaś do drugiego $w^{-1}yz$. Stąd już wynika (2.2), ponieważ

$$|xyz| - |xy| = |xw| + |w^{-1}yz| - (|x| + |y|) = |w^{-1}yz| - |y| = |x'w| + |w^{-1}yz| - (|x'| + |y|) = |x'yz| - |x'y|. \qquad \square$$

Fakt 2.16. *Dla dowolnego $r > 0$ istnieje $N_r > 0$ takie, że dla dowolnych $N \geq N_r$ oraz $g, h \in G$ z warunków*

$$|h| \leq r, \qquad |gh| = |g|, \qquad T^b_N(gh) = T^b_N(g)$$

wynika, że h jest elementem torsyjnym.

Dowód. Jeśli h nie jest torsyjny, na mocy uwagi następującej po Proposition 1.7.3 w [3] musi być typu hiperbolicznego (co oznacza, ciąg $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ jest nieskończoną quasi-gedoezyjną w G). W tej sytuacji sprzeczność wynika z dowodu Proposition 7.3.1 w [3], z tym zastrzeżeniem, że występującą tam stałą 4δ należy zastąpić przez r. (Może to zwiększyć otrzymaną wartość N_r, jednak poza tym nie narusza poprawności rozumowania). $\square$

Rozdział 3

Konstrukcja granicy odwrotnej

W tym rozdziale skorzystamy z przytoczonego poniżej klasycznego twierdzenia 3.2, aby przedstawić brzeg Gromowa ∂G w postaci granicy odwrotnej ciągu nerwów odpowiednio dobranych otwartych pokryć $\mathcal{U}_i$ przestrzeni ∂G.

3.1 Twierdzenie o nerwach pokryć

Definicja 3.1. *Gwiazdą* zbioru U z pokrycia $\mathcal{U}$ nazwiemy sumę $\bigcup\{U_i \mid U_i \in \mathcal{U},\ U_i \cap U \neq \emptyset\}$.

Twierdzenie 3.2. *Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, zaś $(\mathcal{U}_i)_{i\geq 0}$ ciągiem otwartych pokryć przestrzeni X, spełniających warunki:*

(i) dla każdego i pokrycie $\mathcal{U}_i$ jest skończone i nie zawiera zbiorów pustych;

(ii) istnieje $n \geq 0$ takie, że $\operatorname{rank} \mathcal{U}_i \leq n$ dla każdego $i \geq 0$;

(iii) ciąg $(\mathcal{U}_i)_{i\geq 0}$ ma własność rozdrabniania (w sensie definicji 1.10a);

(iv) spełniona jest własność gwiazdy: dowolna gwiazda w pokryciu $\mathcal{U}_i$ zawiera się w pewnym elemencie pokrycia $\mathcal{U}_{i-1}$; formalnie:

$$\forall_{i>0}\ \forall_{U\in\mathcal{U}_i}\ \exists_{V\in\mathcal{U}_{i-1}} \bigcup_{U'\in\mathcal{U}_i;\, U\cap U'\neq\emptyset} U' \subseteq V.$$

Niech K_i oznacza nerw pokrycia $\mathcal{U}_i$, i niech v_U oznacza wierzchołek w tym nerwie odpowiadający zbiorowi $U \in \mathcal{U}_i$.

Wówczas istnieje homeomorfizm $\varphi : X \to \varprojlim(K_i, f_i)$, gdzie $f_i : K_{i+1} \to K_i$ jest określone następująco:

- *dla $U \in K_{i+1}$, $f_i(v_U)$ jest barycentrum sympleksu rozpiętego przez $\{v_V \mid V \in K_i,\ V \supseteq U\}$;*
- *dla pozostałych elementów K_{i+1} określamy f_i poprzez liniowe rozszerzenie na każdym sympleksie,*

przy czym dla dowolnego $x \in X$ element $\varphi(x)$ jest jedyną nicią podsystemu $(K_i(x))_{i\geq 0}$, gdzie dla $i \geq 0$ przez $K_i(x)$ oznaczamy sympleks w K_i rozpięty przez zbiór $\{v_U \mid U \in \mathcal{U}_i\, x \in U\}$.

Co więcej, zachodzi warunek z definicji 1.10b: ciąg $(\{f_0^i(\sigma) \mid \sigma \in K_i\})_{i\geq 0}$ ma własność rozdrabniania.

Jest to niewielka modyfikacja twierdzenia [6, tw. 1.13.2] do naszych potrzeb. Podamy teraz, w jaki sposób należy dostosować podany tam dowód.

- Wprawdzie z naszych założeń nie wynika prawdziwość podanego tam warunku (2), jednak łatwo sprawdzić, że w oryginalnym dowodzie warunek ten przydaje się jedynie do uzasadnienia własności sformułowanych powyżej jako (iii) i (iv). Zatem nasze założenia również są wystarczające dla spełnienia tezy.

- Oryginalne sformułowanie twierdzenia nie stwierdza własności rozdrabniania dla ciągów rodzin postaci $(\{f_i^j(\sigma) \mid \sigma \in K_j\})_{j \geq i}$ dla $i \geq 0$. Jednak stosując indukcyjnie nierówność (6) podaną w jego dowodzie, otrzymujemy, że (przy naszych oznaczeniach):

$$\operatorname{diam} f_i^j(\sigma) \leq \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^{j-i} \qquad \text{dla dowolnego sympleksu } \sigma \text{ w } K_j, \tag{3.1}$$

  gdzie n oznacza ograniczenie rzędu pokrycia z warunku (ii). Ograniczenie po prawej stronie w (3.1) nie zależy od wyboru σ, lecz wyłącznie od i, oraz zbiega do zera, gdy $i \to \infty$, co dowodzi żądanej własności. (Oczywiście podane tu konkretne oszacowanie zachodzi jedynie dla wybranej metryki na K_i, użytej w [6] — jednak na mocy uwagi 1.11 nie ma to dla nas znaczenia).

Oznaczenie 3.3. *Przez $[v_1, \ldots, v_i]$ będziemy oznaczać (w kontekście danego kompleksu symplicjalnego) sympleks rozpięty na wierzchołkach $v_1, \ldots, v_i$. Przez π_i będziemy oznaczać naturalne rzutowanie z przestrzeni X (utożsamionej z $\varprojlim K_j$ poprzez φ) do kompleksu K_i.*

Definicja 3.4. Jeśli (K_i, f_i) jest systemem odwrotnym otrzymanym z twierdzenia 3.2 oraz $\sigma = [v_{U_1}, \ldots, v_{U_m}]$ jest sympleksem w K_i, definiujemy *nośnik* σ jako $\operatorname{supp} \sigma = \bigcup_{j=1}^m U_j$.

Fakt 3.5. *Jeśli σ jest sympleksem w K_n, zaś σ' sympleksem w $f_n^{-1}(\sigma)$, to $\operatorname{supp} \sigma' \subseteq \operatorname{supp} \sigma$.*

Dowód. Niech $\sigma = [v_{U_1}, \ldots, v_{U_m}]$ oraz $\sigma' = [v_{U'_1}, \ldots, v_{U'_{m'}}]$. Z definicji f_n wynika, że każdy ze zbiorów U'_j zawiera się w pewnym U_i, a stąd już wynika teza. □

Fakt 3.6. *Jeśli σ jest sympleksem w K_i, to $\pi_i^{-1}(\sigma) \subseteq \operatorname{supp} \sigma$.*

Dowód. Niech $x \in X$ spełnia $\pi_i(x) \in \sigma = [v_{U_1}, \ldots, v_{U_k}]$. Wówczas z definicji rodzina $\{U \in \mathcal{U}_i \mid x \in U\}$ zawiera się w $\{U_1, \ldots, U_k\}$. Jednak skoro $\mathcal{U}_i$ jest pokryciem X, musimy mieć $x \in U_1 \cup \ldots \cup U_k = \operatorname{supp} \sigma$. □

3.2 Quasi-niezmiennicze systemy podzbiorów

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną z homeomorficznym działaniem skończenie generowanej grupy hiperbolicznej G (przypomnijmy, że zakładamy, że grupa jest wyposażona w ustalony zbiór generatorów).

Definicje 3.8 i podsumowują warunki, które — jak wykażemy w rozdziałach 3.4 i 4 — wystarczą, aby do ciągu $(\mathcal{U})_{n \geq 0}$ można było zastosować twierdzenie 3.2, a także aby otrzymany system odwrotny wielościanów miał własność Markowa (w sensie definicji 1.9). W następnym podrozdziale dla grupy G skonstruujemy pewien ciąg pokryć ∂G, posiadający wszystkie wymienione tu własności.

Oznaczenie 3.7. *Dla dowolnej rodziny $\mathcal{C} = \{C_x\}_{x\in G}$ podzbiorów przestrzeni X oznaczamy:*

$$\mathcal{C}_n = \big\{ C_x \;\big|\; x \in G,\ |x| = n \big\}, \qquad |\mathcal{C}|_n = \bigcup_{C\in\mathcal{C}_n} C.$$

Rodzinę $\mathcal{C}$ będziemy zazwyczaj utożsamiać z ciągiem podrodzin $(\mathcal{C}_n)_{n\geq 0}$.

Definicja 3.8. Rodzinę $\mathcal{C} = \{C_x\}_{x\in G}$ podzbiorów przestrzeni X nazywamy *systemem quasi-G-niezmienniczym*, jeśli istnieją *stała sąsiedztwa* $D > 0$ oraz *stała skoku* $J > 0$ takie, że:

(QI1) ciąg podrodzin $(\mathcal{C}_n)_{n\geq 0}$, gdzie $\mathcal{C}_n = \big\{ C_x \;\big|\; x \in G,\ |x| = n \big\}$, ma własność rozdrabniania (w sensie definicji 1.10a);

(QI2) dla każdego n oraz $x, y \in G$ zachodzi implikacja

$$|x| = |y| = n, \quad C_x \cap C_y \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad d(x,y) \leq D;$$

(QI3) dla każdego $x \in G$ oraz $0 < k \leq \frac{|x|}{J}$ istnieje $y \in G$ takie, że $|y| = |x| - kJ$ oraz $C_y \supseteq C_x$;

(QI4) istnieje skończenie wartościowa funkcja *typu* T określona na G taka, że jeśli tylko $T(x) = T(gx)$ dla $g, x \in G$, to:

(a) $C_{gx} = g \cdot C_x$;

(b) dla dowolnego $y \in G$ takiego, że $|y| = |x|$ oraz $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, zachodzi

$$C_{gy} = g \cdot C_y, \qquad |gy| = |gx|;$$

(c) dla dowolnego $y \in G$ takiego, że $|y| = |x| + kJ$ dla pewnego $k > 0$ oraz $\emptyset \neq C_y \subseteq C_x$, zachodzi

$$|gy| = |gx| + kJ, \qquad T(gy) = T(y), \qquad \text{a zatem} \qquad C_{gy} = g \cdot C_y.$$

Uwaga 3.9. Zauważmy, że z prawdziwości warunku (QI3) dla $k = 1$ wynika przez indukcję jego prawdziwość dla wszystkich $k > 0$, oraz że to samo dotyczy warunku (QI4c).

Definicja 3.10. System $\mathcal{C} = \{C_x\}_{x\in G}$ podzbiorów X nazywamy *systemem pokryć*, jeśli $\mathcal{C}_n$ jest otwartym pokryciem X dla każdego $n \geq 0$.

3.3 System pokryć wnętrzami gwiazd zasięgów

Definicja 3.11. Dla dowolnego elementu $g \in G$ oraz $r > 0$ oznaczamy

$$P(x) = \big\{ y \in G \,\big|\, |xy| = |y| \big\}, \qquad P_r(x) = P(x) \cap B_r(e).$$

Jeśli $y \in P(x)$ (odp. $P_r(x)$), powiemy, że xy jest *towarzyszem* (odp. r-*towarzyszem*) elementu x.

Z definicji typu kulowego otrzymujemy natychmiast następującą własność.

Fakt 3.12. *Jeśli $N \geq r > 0$, zbiór $P_r(x)$ zależy wyłącznie od $T^b_N(x)$ oraz r, N.* □

Definicja 3.13. Definiujemy zbiór S_g jako wnętrze gwiazdy zasięgów w ∂G wokół $\operatorname{span}(g)$:

$$S_g = \operatorname{int}\Big(\bigcup_{h\in I(g)} \operatorname{span}(gh)\Big), \qquad \text{gdzie} \quad I(g) = \big\{h \in P(g) \bigm| \operatorname{span}(gh) \cap \operatorname{span}(g) \neq \emptyset\big\}.$$

Dla dowolnego $k > 0$, określamy rodzinę

$$\mathcal{S}_k = \{S_g \mid g \in G,\ |g| = k,\ S_g \neq \emptyset\}.$$

Fakt 3.14. *Dla dowolnego $g \in G$ zachodzi* $\operatorname{span}(g) \subseteq S_g$.

Dowód. Rozważmy równość

$$\partial G = \bigcup_{h\in P(g)} \operatorname{span}(gh) = \Big(\bigcup_{h\in I(g)} \operatorname{span}(gh)\Big) \cup \Big(\bigcup_{h\in P(g)\setminus I(g)} \operatorname{span}(gh)\Big).$$

Ponieważ drugi składnik jest rozłączny z $\operatorname{span}(g)$, a także domknięty (jako skończona suma zbiorów domkniętych), wnioskujemy, że $\operatorname{span}(g)$ musi zawierać się we wnętrzu pierwszego składnika, czyli dokładnie w S_g. □

Wniosek 3.15. *Dla każdego $k > 0$ rodzina $\mathcal{S}_k$ jest pokryciem przestrzeni ∂G.*

Dowód. Wynika to natychmiast z powyższego faktu i stąd, że $\partial G = \bigcup_{g\in G\,:\,|g|=k} \operatorname{span}(g)$. □

Fakt 3.16. *Przy oznaczeniach faktu 2.10 dla każdego $k > 0$ oraz $U \in \mathcal{S}_k$ zachodzi* $\operatorname{diam} U \leq 3C \cdot a^{-k}$.

Dowód. Niech $U = S_g$ dla pewnego $g \in G$, gdzie $|g| = k$, i niech $x, y \in S_g$. Wówczas $x \in \operatorname{span}(gh_1)$ i $y \in \operatorname{span}(gh_2)$ dla pewnych $h_1, h_2 \in I(g)$. Stąd, na mocy faktu 2.10,

$$d(x, y) \leq \operatorname{diam}\operatorname{span}(gh_1) + \operatorname{diam}\operatorname{span}(g) + \operatorname{diam}\operatorname{span}(gh_2) \leq 3C \cdot a^{-k}.$$ □

Fakt 3.17. *Niech $h \in P(g)$. Wówczas:*

(a) *Jeśli* $\operatorname{span}(g) \cap \operatorname{span}(gh) \neq \emptyset$, *to $|h| \leq 4\delta$ (czyli: $I(g) \subseteq P_{4\delta}(g)$);*

(b) *Jeśli $S_g \cap S_{gh} \neq \emptyset$, to $|h| \leq 12\delta$.*

Dowód. **(a)** Niech $|g| = |gh| = k$ oraz $x \in \operatorname{span}(g) \cap \operatorname{span}(gh)$. Wówczas istnieją geodezyjne α, β wychodzące z e i zbieżne do x takie, że $\alpha(k) = g$, $\beta(k) = gh$. Na mocy nierówności (1.3.4.1) w [3] oznacza to, że $d(g, gh) \leq 4\delta$.

(b) Niech teraz $x \in S_g \cap S_{gh}$. Wówczas z definicji mamy $x \in \operatorname{span}(gu) \cap \operatorname{span}(ghv)$ dla pewnych $u \in I(g)$, $v \in I(gh)$. Korzystając z punktu **a)**, otrzymujemy

$$|h| \leq |u| + |u^{-1}hv| + |v^{-1}| \leq 4\delta + 4\delta + 4\delta = 12\delta.$$ □

Fakt 3.18. *Niech $g \in G$ oraz $k < |g|$. Wówczas:*

(a) *istnieje $f \in G$ długości k takie, że $g \in fT^c(f)$;*

(b) *dla każdego $f \in G$ o własnościach z punktu **(a)** zachodzi* $\operatorname{span}(g) \subseteq \operatorname{span}(f)$*;*

(c) *dla każdego $f \in G$ o własnościach z punktu **(a)** zachodzi $S_g \subseteq S_f$.*

Dowód. **(a)** Niech α będzie odcinkiem geodezyjnym z e do g. Wówczas $f = \alpha(k)$ ma żądane własności.

(b) Jeśli f ma własności z punktu **(a)**, to z faktu 2.5 mamy $gT^c(g) \subseteq fT^c(f)$, zatem pozostaje zastosować fakt 2.9.

(c) Na mocy poprzednich punktów dla każdego $h \in I(g)$ istnieje pewien element f_h o długości k taki, że $\operatorname{span}(gh) \subseteq \operatorname{span}(f_h)$; przy tym za f_e możemy przyjąć f. W szczególności wynika stąd, że

$$\emptyset \neq \operatorname{span}(g) \cap \operatorname{span}(gh) \subseteq \operatorname{span}(f) \cap \operatorname{span}(f_h),$$

a więc $f^{-1}f_h \in I(f)$. Z dowolności $h \in I(g)$ mamy

$$\bigcup_{h\in I(g)} \operatorname{span}(gh) \subseteq \bigcup_{h\in I(g)} \operatorname{span}(f_h) \subseteq \bigcup_{x\in I(f)} \operatorname{span}(fx).$$

Biorąc wnętrza zbiorów po obu skrajnych stronach zawierania, otrzymujemy tezę. □

Lemat 3.19. *Niech N_0 oznacza stałą z lematu 2.13. Załóżmy, że $N, r \geq 0$ oraz $g, x \in G$ spełniają $T^b_N(gx) = T^b_N(x)$. Wówczas:*

(a) jeśli $N \geq N_0$, to $\operatorname{span}(gx) = g \cdot \operatorname{span}(x)$;

(b) jeśli $N \geq N_0 + r$, to $\operatorname{span}(gxy) = g \cdot \operatorname{span}(xy)$ dla $y \in P_r(x)$;

(c) jeśli $N \geq N_1 := N_0 + 4\delta$, to $S_{gx} = g \cdot S_x$;

(d) jeśli $N \geq N_1 + r$, to $S_{gxy} = g \cdot S_{xy}$ dla $y \in P_r(x)$;

(e) jeśli $N \geq N_2 := N_0 + 16\delta$ oraz $y \in G$ spełnia $|y| = |x|$ i $S_x \cap S_y \neq \emptyset$, to

$$S_{gy} = g \cdot S_y, \qquad \text{a ponadto} \qquad |gy| = |gx|;$$

(f) jeśli $N \geq N_3 := N_0 + 21\delta$, $k \geq 0$, $L > N + k + 4\delta$ oraz $y \in G$ spełnia $|y| = |x| + L$ i $\emptyset \neq S_y \subseteq S_x$, to:

$$S_{gy} = g \cdot S_y, \qquad \text{a ponadto} \qquad |gy| = |gx| + L \quad \text{oraz} \quad T^b_{N+k}(gy) = T^b_{N+k}(y).$$

Dowód. **(a)** Jeśli $N \geq N_0$, z lematu 2.13 wynika, że $T^c(gx) = T^c(x)$, a więc $gxT^c(gx) = g \cdot xT^c(x)$. W szczególności lewostronne przesunięcie o g, jako izometria, wyznacza jednoznaczną odpowiedniość między geodezyjnymi w G wychodzącymi z x i zawartymi w $xT^c(x)$ a geodezyjnymi w G wychodzącymi z gx i zawartymi w $gxT^c(gx)$. Teza wynika zatem z faktu 2.9 oraz ciągłości działania elementem g na przestrzeni $G \cup \partial G$.

(b) Jeśli $N \geq N_0 + r$, to z faktu 2.14 mamy $T^b_{N_0}(gxy) = T^b_{N_0}(xy)$ dla każdego $y \in P_r(x)$; pozostaje skorzystać z **(a)**.

(c) Niech $y \in I(x)$. Z faktu 3.17a mamy $y \in P_{4\delta}(x)$. Skoro $N \geq N_0 + 4\delta$, to z punktu **(b)** oraz faktu 3.12 wynika, że

$$\operatorname{span}(gx) = g \cdot \operatorname{span}(x), \qquad \operatorname{span}(gxy) = g \cdot \operatorname{span}(xy), \qquad y \in P_{4\delta}(gx).$$

Ponieważ $\operatorname{span}(x) \cap \operatorname{span}(xy) \neq \emptyset$, działając elementem g otrzymujemy $\operatorname{span}(gx) \cap \operatorname{span}(gxy) \neq \emptyset$, a więc $y \in I(gx)$. W takim razie mamy

$$g \cdot \bigcup_{y\in I(x)} \operatorname{span}(xy) = \bigcup_{y\in I(x)} \operatorname{span}(gxy) \subseteq \bigcup_{y\in I(gx)} \operatorname{span}(gxy).$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla elementu odwrotnego g^{-1} dowodzimy, że powyższe zawieranie jest w istocie równością. Co więcej, ponieważ lewostronne działanie elementem g jest homeomorfizmem, musi przeprowadzać wnętrze sumy po lewej stronie (czyli S_x) dokładnie na wnętrze sumy po prawej stronie (czyli S_{gx}).

(d) Ten punkt wynika z **(c)** tak samo, jak **(b)** wynikało z **(a)**.

(e) Z faktu 3.17b mamy $x^{-1}y \in P_{12\delta}(x)$. Wobec tego pierwsza część tezy wynika z punktu **(d)**, natomiast druga — z założenia, że $T^b_N(x) = T^b_N(gx)$ oraz $N \geq 16\delta$.

(f) Niech $|y| \geq |x|$ oraz $S_y \subseteq S_x$. Z faktu 3.18 wynika, że istnieje $z \in G$ takie, że

$$|xz| = |x|, \qquad y \in xzT^c(xz), \qquad S_y \subseteq S_{xz}.$$

W szczególności $S_{xz} \cap S_x \neq \emptyset$, zatem z faktu 3.17 mamy $z \in P_{12\delta}(x)$. Z faktów 2.14 oraz 3.12 otrzymujemy

$$T^b_{N-12\delta}(gxz) = T^b_{N-12\delta}(xz), \qquad z \in P_{12\delta}(gx). \tag{3.2}$$

Z pierwszej z tych własności na mocy lematu 2.13 mamy $T^c(gxz) = T^c(xz)$. Ponieważ element $(xz)^{-1}y$ należy do $T^c(xz)$ i ma długość równą

$$|(xz)^{-1}y| = |y| - |xz| = |y| - |x| = L > N + k + 4\delta, \tag{3.3}$$

stosując do (3.2) lemat 2.15 dla przesunięcia o $(xz)^{-1}y$ (i parametrów $N - 12\delta > N_0 + 8\delta$, $N + k$) otrzymujemy

$$T^b_{N+k}(gy) = T^b_{N+k}(y),$$

a stąd na mocy punktu **(c)**

$$S_{gy} = g \cdot S_y.$$

Ponadto z warunków $(xz)^{-1}y \in T^c(gxz)$, (3.3) oraz (3.2) mamy

$$|gy| = |gxz| + |(xz)^{-1}y| = |gxz| + L = |gx| + L,$$

co kończy dowód. □

Wniosek 3.20. *Dla $N \geq N_3$ ciąg pokryć $(\mathcal{S}_n)$ z funkcją $T = T^b_N$ jest quasi-G-niezmienniczym systemem pokryć.*

Dowód. We wniosku 3.15 sprawdziliśmy, że każde $\mathcal{S}_n$ jest pokryciem przestrzeni ∂G; oczywiście jest to pokrycie otwarte. Kolejne warunki w definicji 3.8 wynikają natychmiast odpowiednio z faktów 3.16, 3.17b i 3.18 oraz lematu 3.19c,e,f (dla $k = 0$). Przy tym uzyskujemy:

$$D = 12\delta, \qquad J_0 = 0, \qquad J = N_3 + 4\delta.$$ □

3.4 Wykonalność konstrukcji dla systemów pokryć

Lemat 3.21. *Niech $(\mathcal{U}_n)$ będzie quasi-G-niezmienniczym systemem pokryć w przestrzeni X i niech J oznacza jego stałą skoku. Wówczas istnieje stała L_0 taka, że dla dowolnego $L \geq L_0$ podzielnego przez J ciąg pokryć $(\mathcal{U}_{Ln})_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia własność gwiazdy (patrz twierdzenie 3.2, własność (iv)).*

Dowód. Niech $L_{(i)}$ będzie taką stałą, że dowolny zbiór z poziomu $i + L_{(i)}$ lub głębszego wraz ze swoją gwiazdą jest zawarty w pewnym zbiorze z pokrycia na poziomie i. Jej istnienie jest natychmiastowym wnioskiem z istnienia stałej Lebesgue'a dla pokrycia poziomu i oraz ze zbieżności średnic zbiorów do 0 wraz ze wzrostem poziomu.

Ponieważ istnieje skończenie wiele N-typów w G, istnieje $S > 0$ takie, że dla dowolnego $g \in G$ istnieje $g' \in G$ takie, że $|g'| < S$ oraz $T(g) = T(g')$. Pokażemy, że teza lematu jest spełniona przez

$$L_0 = 1 + \max\{L_{(i)} \,|\, i < S\}.$$

Niech $|g| = L(k+1)$ oraz $L \geq L_0$ będzie podzielne przez J; chcemy pokazać, że istnieje $\tilde{f} \in G$ długości Lk takie, że $U_{\tilde{f}}$ zawiera U_g oraz wszystkie zbiory sąsiednie poziomu $L(k+1)$. Jeśli $Lk < S$, wynika to z nierówności $L \geq L_0 \geq L_{(Lk)}$ oraz definicji stałej $L_{(Lk)}$.

W przeciwnym razie na mocy własności (QI3) istnieje f długości Lk takie, że $U_g \subseteq U_f$. Niech $f' \in G$ o długości $j < S$ spełnia $T(f') = T(f)$. Oznaczmy $h = f'f^{-1}$. Wówczas, skoro $J \mid L$, z (QI4c) mamy

$$U_{hg} = h \cdot U_g \subseteq h \cdot U_f = U_{f'}, \qquad T(hg) = T(g), \qquad |hg| = j + L. \tag{3.4}$$

Wobec tego, jako że $j < S$, istnieje element $\tilde{f}'$ długości j taki, że $U_{\tilde{f}'}$ zawiera U_{hg} razem z całą jego gwiazdą. Wówczas z (3.4) mamy $U_{\tilde{f}'} \cap U_{f'} \neq \emptyset$, a więc z własności (QI4b) otrzymujemy

$$U_{h^{-1}\tilde{f}'} = h^{-1} \cdot U_{\tilde{f}'}, \qquad |h^{-1}\widetilde{f'}| = |h^{-1}f'| = Lk.$$

Niech teraz $|x| = |g|$ oraz $U_x \cap U_g \neq \emptyset$. Wówczas z (3.4) i (QI4b) otrzymujemy $U_{hx} = h \cdot U_x$; w szczególności U_{hx} zawiera się w gwieździe zbioru $U_{hg} = h \cdot U_g$, a więc zawiera się w $U_{\tilde{f}'}$. Stąd z (QI4c):

$$U_x = h^{-1} \cdot U_{hx} \subseteq h^{-1} \cdot U_{\tilde{f}'} = U_{h^{-1}\tilde{f}'}.$$

Oznacza to, że element $\tilde{f} := h^{-1}\tilde{f}'$ ma żądaną własność. □

Wniosek 3.22. *Niech $(\mathcal{U}_n)$ będzie quasi-G-niezmienniczym systemem pokryć G-przestrzeni X. Zdefiniujmy*

$$\widetilde{\mathcal{U}}_n = \{U \in \mathcal{U}_n \,|\, U \neq \emptyset\}.$$

Niech L_0 oznacza stałą otrzymaną dla systemu $(\mathcal{U}_n)$ w lemacie 3.21. Wówczas dla dowolnego $L \geq L_0$ ciąg pokryć $(\widetilde{\mathcal{U}}_{nL})_{n\geq 0}$ spełnia założenia twierdzenia 3.2.

Dowód. Oczywiście dla każdego n rodzina $\widetilde{\mathcal{U}}_n$ jest otwartym pokryciem X. Warunek (i) w treści twierdzenia 3.2 wynika wprost z definicji $\widetilde{\mathcal{U}}_n$. Warunki (iii) oraz (iv) wynikają odpowiednio z własności (QI1) oraz lematu 3.21.

Natomiast warunek (ii) łatwo wynika z własności (QI2): jeśli tylko $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, to mamy $d(x, y) \leq D$, czyli $x^{-1}y$ należy do kuli w G o środku w e i promieniu D. Oznacza to, że rząd pokrycia $\mathcal{U}_n$ (a tym samym $\widetilde{\mathcal{U}}_n$) nie przekracza liczby elementów w tej kuli, która jest skończona i niezależna od n. □

Rozdział 4

Własność Markowa

Naszym celem w tym rozdziale jest wykazanie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.1. *Niech $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ będzie quasi-G-niezmienniczym systemem pokryć zwartej metrycznej G-przestrzeni X. Niech L_0 oznacza stałą otrzymaną dla tego systemu w lemacie 3.21, $L \geq L_0$ i niech (K_n, f_n) będzie systemem odwrotnym kompleksów otrzymanym dla ciągu pokryć $(\widetilde{\mathcal{U}}_{nL})_{n\geq 0}$.*

Wówczas system (K_n, f_n) spełnia warunki z definicji 1.9, 1.10b oraz 1.12, co oznacza, że X jest barycentrycznym kompaktem Markowa z własnością rozdrabniania.

4.1 Typy i przesunięcia

Poniżej (w definicji 4.3) zdefiniujemy *typ sympleksu*, który zostanie użyty do wykazania własności Markowa dla systemu (K_n, f_n). Intuicyjnie, chcielibyśmy, aby typ sympleksu $s = [v_{U_{g_1}}, \ldots, v_{U_{g_k}}]$ zawierał informację o typach elementów g_i (co wydaje się naturalne), lecz także o ich wzajemnym położeniu w grupie G (co znacząco ułatwi, jak przekonamy się w rozdziale 4.2, kontrolowanie przeciwobrazów przy odwzorowaniach f_n).

Obraz ten ulega jednak komplikacji wskutek tego, że w ogólności nie mamy gwarancji jednoznaczności wyboru elementu g odpowiadającego zbiorowi $U_g \in \widetilde{\mathcal{U}}_n$. Wobec tego w typie sympleksu umieścimy typy i wzajemne położenia *wszystkich* elementów reprezentujących jego wierzchołki.

Efektem powyższych rozważań jest dość skomplikowana definicja typu sympleksu, której jednak prawie nigdy nie użyjemy bezpośrednio. Okazuje się bowiem, że równość tak rozumianych typów można wygodnie opisać poprzez istnienie pomiędzy nimi *przesunięcia*, zachowującego naszkicowaną powyżej strukturę (patrz definicja 4.4). Własność tę wykorzystamy w wielu dowodach w dalszych rozdziałach.

Oznaczmy przez Q_n nerw pokrycia $\widetilde{\mathcal{U}}_n$). (Wówczas $K_n = Q_{nL}$).

Definicja 4.2. Dla sympleksu s w Q_n definiujemy graf skierowany $G_s = (V_s, E_s)$ następująco:

- wierzchołkami w G_s są elementy $g \in G$, dla których v_{U_g} jest wierzchołkiem w s (a więc $|g| = n$);
- każdy wierzchołek $g \in V_s$ etykietujemy jego typem $T(g)$;
- krawędziami w G_s są wszystkie pary (g, g') dla $g, g' \in V_s$, $g \neq g'$;
- każdą krawędź (g, g') etykietujemy elementem $g^{-1}g' \in G$.

Definicja 4.3. Dwa sympleksy $s \in Q_n$ i $s' \in Q_{n'}$ nazwiemy *podobnymi*, jeśli istnieje izomorfizm grafów $\varphi : G_s \to G_{s'}$, zachowujący etykiety wierzchołków i krawędzi.

Typem sympleksu $s \in Q_n$ (oznaczenie: $T^{\Delta}(s)$) nazwiemy jego klasę podobieństwa.
(Zatem: dwa sympleksy są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe typy).

Definicja 4.4. Sympleks $s' \in Q_{n'}$ nazwiemy *przesunięciem* sympleksu $s \in Q_n$ o element γ (oznaczenie: $s' = \gamma \cdot s$), jeśli wzór $\varphi(g) = \gamma \cdot g$ zadaje izomorfizm φ spełniający warunki z definicji 4.3.

Fakt 4.5. *Przesuwanie sympleksów spełnia naturalne własności (częściowego) działania G na zbiorze:*

$$\text{jeśli} \qquad s' = \gamma \cdot s \quad \text{i} \quad s'' = \gamma' \cdot s', \qquad \text{to} \qquad s = \gamma^{-1} \cdot s' \quad \text{i} \quad s'' = (\gamma' \gamma) \cdot s. \qquad \square$$

Fakt 4.6. *Dowolne sympleksy $s \in Q_n$, $s' \in Q_{n'}$ mają równe typy $\iff$ $s' = \gamma \cdot s$ dla pewnego $\gamma \in G$.*

Dowód. Implikacja ($\Leftarrow$) jest oczywista. W drugą stronę, niech $\varphi : G_s \to G_{s'}$ będzie izomorfizmem spełniającym warunki z definicji 4.3. Wybierzmy dowolnie $g_0 \in V_s$ i określmy $\gamma = \varphi(g_0)\, g_0^{-1}$. Ponieważ φ zachowuje etykiety krawędzi, dla dowolnego $g \in V_s \setminus \{g_0\}$ mamy

$$\varphi(g_0)^{-1} \varphi(g) = g_0^{-1} g \quad \Rightarrow \quad \varphi(g)\, g^{-1} = \varphi(g_0)\, g_0^{-1} = \gamma \quad \Rightarrow \quad \varphi(g) = \gamma \cdot g. \qquad \square$$

Fakt 4.7. *Jeśli $s' = \gamma \cdot s$ oraz v_{U_x} jest wierzchołkiem w s, to $v_{U_{\gamma x}}$ jest wierzchołkiem w s', a przy tym*

$$U_{\gamma x} = \gamma \cdot U_x, \qquad T(\gamma x) = T(x).$$

W szczególności, przesuwanie zbiorów z $\widetilde{\mathcal{U}}$ o element γ zadaje bijekcję między wierzchołkami s a s'.

Dowód. Wynika to natychmiast z definicji 4.2 i 4.4 oraz własności (QI4a). $\square$

Fakt 4.8. *Niech $m, n, d \geq 0$, $s \in Q_n$ oraz $\gamma, x \in G$ spełniają warunki*

$$\operatorname{supp} s \subseteq U_x, \qquad T(x) = T(\gamma x), \qquad |x| = n - d, \qquad |\gamma x| = m - d, \qquad d \geq J,$$

gdzie J oznacza stałą skoku systemu $(\mathcal{U}_n)$. Wówczas sympleks $\gamma \cdot s$ istnieje i należy do Q_m.

Dowód. Niech $g \in V_s$; wówczas $U_g \subseteq \operatorname{supp} s \subseteq U_x$, zatem z własności (QI4) mamy

$$U_{\gamma g} = \gamma \cdot U_g, \qquad T(\gamma g) = T(g), \qquad |\gamma g| = mL. \tag{4.1}$$

W szczególności jeśli $s = [v_{U_{g_1}}, \ldots, v_{U_{g_k}}]$, to łatwo wynika stąd, że w Q_m istnieje sympleks $s' = [v_{U_{\gamma g_1}}, \ldots, v_{U_{\gamma g_k}}]$. Co więcej, dla dowolnego $g \in V_s$ mamy $U_g = U_{g_i}$ dla pewnego $1 \leq i \leq k$, a wówczas z (4.1) mamy $U_{\gamma g} = \gamma \cdot U_g = U_{\gamma g_i}$, zatem $\gamma g \in V_{s'}$. To oznacza, że lewostronne mnożenie przez γ zadaje bijekcję między wierzchołkami grafów G_s i $G_{s'}$. Z (4.1) wynika, że zachowuje ono etykiety wierzchołków; zachowywanie etykiet krawędzi wynika wprost z definicji. $\square$

Lemat 4.9. *Łączna liczba typów sympleksów we wszystkich kompleksach Q_n jest skończona.*

Dowód. Rozważmy sympleks $s \in K_n$. Jeśli $g, g' \in V_s$, to wierzchołki $v_{U_g}, v_{U_{g'}}$ należą do s, co oznacza z definicji, że $U_g \cap U_{g'} \neq \emptyset$, a to z własności (QI2) oraz definicji V_s oznacza, że $|g^{-1}g'| \leq D$. Oznacza to, że zarówno liczba wierzchołków w grafach G_s, jak i liczba możliwych etykiet krawędzi pojawiających się we wszystkich takich grafach, nie przekraczają liczności kuli $B(e, D)$ w grupie G. To kończy dowód, ponieważ etykiety wierzchołków z założenia pochodzą ze skończonego zbioru typów w G. $\square$

4.2 Typ sympleksu wyznacza jego przeciwobraz

Lemat 4.10. *Niech $s \in K_n$, $s' \in K_{n'}$ będą sympleksami tego samego typu oraz $s' = \gamma \cdot s$ dla pewnego $\gamma \in G$. Wówczas przekształcenia $I : s \to s'$ oraz $J : f_n^{-1}(s) \to f_n^{-1}(s')$, określone na wierzchołkach odpowiednich podkompleksów wzorami*

$$I(v_U) = v_{\gamma \cdot U} \quad \text{dla } v_U \in s, \qquad J(v_U) = v_{\gamma \cdot U} \quad \text{dla } v_U \in f_n^{-1}(s),$$

oraz rozszerzone afinicznie na sympleksy w tych podkompleksach, mają następujące własności:

- *są poprawnie określone (w szczególności $\gamma \cdot U$ jest elementem odpowiedniego pokrycia);*
- *są izomorfizmami podkompleksów;*
- *przeprowadzają sympleksy na ich przesunięcia o γ (w szczególności zachowują ich typy).*

Ponadto następujący diagram jest przemienny:

(4.2)
$$\begin{tikzcd} s \arrow[d, "I"'] & f_n^{-1}(s) \arrow[l, "f_n"'] \arrow[d, "J"] \\ s' & f_{n'}^{-1}(s'). \arrow[l, "f_{n'}"'] \end{tikzcd}$$

Dowód. Niech

(4.3)
$$s = [v_{U_1}, \dots, v_{U_k}], \qquad U_i = U_{g_i}, \qquad g_i' = \gamma\, g_i, \qquad U_i' = U_{g_i'}.$$

Wówczas z założeń (korzystając z definicji oraz z faktu 4.7) wnioskujemy, że

$$s' = [v_{U_1'}, \dots, v_{U_k'}], \qquad U_i' = \gamma \cdot U_i, \qquad T(g_i) = T(g_i'), \qquad |g_i| = nL, \qquad |g_i'| = n'L.$$

Wynika stąd w szczególności, że dla $v_U \in s$ wartość $I(v_U)$ jest poprawnie określona i należy do s'; przy tym I zadaje bijekcję między wierzchołkami s i s', a więc jest izomorfizmem. Co więcej, dla dowolnego podsympleksu $\sigma = [v_{U_{i_1}}, \dots, v_{U_{i_l}}] \subseteq s$ oraz $g \in G_s$ na mocy faktu 4.7 mamy równoważność

$$v_{U_g} \in \sigma \quad \Leftrightarrow \quad U_g \in \{U_{i_j} \,|\, 1 \le j \le l\} \quad \Leftrightarrow \quad U_{\gamma g} \in \{\gamma \cdot U_{i_j} \,|\, 1 \le j \le l\} \quad \Leftrightarrow \quad v_{U_{\gamma g}} \in I(\sigma),$$

zatem izomorfizm $G_s \simeq G_{s'}$ zadany przez γ obcina się do izomorfizmu $G_\sigma \simeq G_{I(\sigma)}$, a więc $I(\sigma) = \gamma \cdot \sigma$.

Pozostaje nam sprawdzić żądane własności przekształcenia J oraz przemienność diagramu (4.2).

Sprawdźmy najpierw, że J jest poprawnie określone. Niech v_U będzie wierzchołkiem w $f_n^{-1}(s)$ i niech $U = U_h$ dla pewnego $h \in G$ długości $(n+1)L$. Z definicji f_n wynika, że $U_h \subseteq U_{g_i}$ dla pewnego $1 \le i \le k$. Wówczas, oznaczając $h' = \gamma h$, z własności (QI4c) mamy

(4.4)
$$U_{h'} = \gamma \cdot U_h \subseteq \gamma \cdot U_{g_i} = U_{g_i'}, \qquad T(h') = T(h), \qquad |h'| = (n'+1)L,$$

skąd wynika w szczególności, że $\gamma \cdot U_h \in \widetilde{\mathcal{U}}_{(n'+1)L}$, a więc $J(v_U) = v_{\gamma \cdot U_h}$ jest wierzchołkiem w $K_{n'+1}$.

Wykażemy teraz, że wierzchołek $J(v_U)$ należy do $f_{n'}^{-1}(s')$ oraz że diagram (4.2) jest przemienny. Z definicji przekształceń f_n, $f_{n'}$ wynika, że dla obu tych celów wystarczy wykazać, że

(4.5)
$$\big\{U' \,\big|\, U' \in \mathcal{U}_{n'L},\, U' \supseteq U_{h'}\big\} = \big\{\gamma \cdot U \,\big|\, U \in \mathcal{U}_{nL},\, U \supseteq U_h\big\}.$$

Sprawdźmy zawieranie ($\supseteq$). Niech $U_g = U \supseteq U_h$ dla pewnego $g \in G$ o długości nL. Wówczas w szczególności $U_g \cap U_{g_i} \supseteq U_h \neq \emptyset$, zatem z własności (QI4b) mamy

$$U_{\gamma g} = \gamma \cdot U_g \supseteq \gamma \cdot U_h = U_{h'}, \qquad |\gamma g| = n'L.$$

To dowodzi zawierania ($\supseteq$) w (4.5). Ponieważ $U_{g'_i} = \gamma \cdot U_{g_i} \supseteq \gamma \cdot U_h = U_{h'}$, zawieranie przeciwne można wykazać całkowicie analogicznie, rozważając tym razem przesunięcie o element γ^{-1}. Dowiedliśmy zatem (4.5). Wynika stąd w szczególności, że $J(v_U) \in f_{n'}^{-1}(s')$ dla dowolnego $v_U \in f_n^{-1}(s)$, a więc J jest poprawnie określone na wierzchołkach kompleksu $f_n^{-1}(s)$. Z (4.5) wynika również przemienność diagramu (4.2) po obcięciu do wierzchołków rozważanych kompleksów.

Niech teraz $\sigma = [v_{U_{h_1}}, \ldots, v_{U_{h_l}}]$ będzie sympleksem w $f_n^{-1}(s)$. Wówczas mamy $\bigcap_{i=1}^{l} U_{h_i} \neq \emptyset$, a więc również $\bigcap_{i=1}^{l} U_{\gamma h_i} = \gamma \cdot \bigcap_{i=1}^{l} U_{h_i} \neq \emptyset$. Wynika stąd, że w $f_{n'}^{-1}(s')$ istnieje sympleks $[J(v_{U_{h_1}}), \ldots, J(v_{U_{h_l}})]$. Oznacza to, że rozszerzając J w sposób afiniczny z wierzchołków na sympleksy otrzymujemy poprawnie określone odwzorowanie kompleksów. Przemienność diagramu (4.2) wynika w tej sytuacji ze sprawdzonej już przemienności dla wierzchołków.

Ponieważ zamiana rolami sympleksów s i s' oraz elementów g_i z elementami g'_i powoduje zamianę rolami elementów γ i γ^{-1}, odwzorowanie $\widetilde{J} : f_{n'}^{-1}(s') \to f_n^{-1}(s)$ otrzymane w analogiczny sposób dla takiej sytuacji musi być odwrotne do J. Zatem J jest izomorfizmem.

Do sprawdzenia pozostała równość $J(\sigma) = \gamma \cdot \sigma$ dla dowolnego sympleksu σ w $f_n^{-1}(s)$. W tym celu wybierzmy dowolny element $h \in V_\sigma$ (tzn. będący wierzchołkiem w grafie G_σ z definicji 4.2) i przyjmijmy $\varphi(h) = \gamma h$; element ten był wcześniej oznaczony przez h'. Wówczas z (4.4) oraz już sprawdzonych własności J wynika, że

$$v_{U_{\gamma h}} = v_{\gamma \cdot U_h} = J(v_{U_h}) \text{ jest wierzchołkiem w } J(\sigma), \qquad T(\gamma h) = T(h).$$

Pierwszy z tych faktów oznacza, że $\varphi(h)$ istotnie należy do $V_{J(\sigma)}$; drugi zapewnia, że φ zachowuje etykiety wierzchołków w grafach. Zachowywanie etykiet krawędzi wynika łatwo z definicji φ. Pozostaje więc jedynie sprawdzenie, że φ zadaje bijekcję między V_σ a $V_{J(\sigma)}$, co można łatwo uzasadnić zamieniając rolami s, σ z s', $J(\sigma)$ i powtarzając powyższe rozumowanie dla przekształcenia odwrotnego J^{-1}. $\square$

4.3 Dowód twierdzenia 4.1

Barycentryczność oraz własność rozdrabniania dla systemu (K_n, f_n) wynika z twierdzenia 3.2; pozostaje sprawdzić własność Markowa dla tego systemu. Prawdziwość warunku (ii) w definicji 1.9 wynika wprost ze sposobu określenia przekształceń f_n w tezie twierdzenia 3.2; warunek (i) jest z kolei wnioskiem z założenia (ii) w treści tego twierdzenia. Pozostaje więc zadbać o warunek (iii).

Typem, który przyporządkowujemy sympleksom, jest typ T^Δ, określony w definicji 4.3. Jeśli sympleksy $s \in K_i$, $s' \in K_j$ mają równy typ, to z faktu 4.6 wynika, że $s' = \gamma \cdot s$ dla pewnego $\gamma \in G$. Wówczas, stosując indukcyjnie lemat 4.10 otrzymujemy, że dla każdego $k \geq 0$ sympleksy w przeciwobrazie $(f_j^{j+k})^{-1}(s')$ pokrywają się dokładnie z przesunięciami o γ sympleksów w przeciwobrazie $(f_i^{i+k})^{-1}(s)$, a ponadto definiując

$$i_k(v_U) = v_{\gamma \cdot U} \qquad \text{dla} \quad k \geq 0,\ v_U \in (f_i^{i+k})^{-1}(s),$$

otrzymujemy poprawnie określone izomorfizmy podkompleksów, zachowujące typy sympleksów, takie, że diagram w definicji 1.9 jest przemienny. To kończy dowód. $\square$

4.4 Struktura kompaktu a metryka wizualna

W niniejszym podrozdziale zdefiniujemy dla dowolnej grupy hiperbolicznej G nową metrykę na przestrzeni ∂G, opartą na systemie odwrotnym (K_n) rozważanym we wcześniejszych podrozdziałach. Ze względu na związek tej metryki ze strukturą kompaktu Markowa na ∂G nazwiemy ją *metryką symplicjalną*. Podobnie jak metryka wizualna (definicja 1.8), będzie ona zależna od dodatkowego parametru $a > 1$, przy czym — jak wykażemy w twierdzeniu 4.17 — dla wartości a dostatecznie bliskich 1 metryki symplicjalna oraz wizualna z parametrem a są bilipschitzowsko równoważne.

Aby zrozumieć faktyczną wymowę tego wyniku, przytoczmy znane własności rodziny metryk wizualnych na przestrzeni ∂G. Definicja metryki wizualnej podana w [3] jest zależna nie tylko od wyboru parametru a, ale również od wyboru wyróżnionego elementu w grupie (w tej pracy jest nim zawsze e) oraz zbioru jej generatorów. Wiadomo, że metryki wizualne otrzymane dla różnych wyborów tych parametrów nie muszą być wzajemnie bilipschitzowsko równoważne, jednak muszą wyznaczać tę samą strukturę quasi-konforemną ([7, twierdzenia 2.18 i 3.2]). W tym kontekście twierdzenie 4.17 pokazuje, że ową naturalną strukturę quasi-konforemną na ∂G można określić przy pomocy zbudowanej w rozdziałach 3 i 4 struktury kompaktu Markowa. W świetle twierdzenia 5.18, które wykażemy w następnym podrozdziale, daje to możliwość (pośredniego) skończonego opisu struktur quasi-konforemnych na brzegach grup hiperbolicznych.

4.4.1 Metryka symplicjalna na ∂G

Przytoczmy definicję metryki na kompleksach symplicjalnych, używanej w twierdzeniu 1.13.2 w [6] (na którym oparte jest twierdzenie 3.2). Dla dowolnego $n \geq 0$ oznaczmy

$$e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Definicja 4.11. Niech K będzie kompleksem symplicjalnym, mającym n wierzchołków. Niech $m \geq n$ oraz $f : K \to \mathbb{R}^m$ będzie przekształceniem afinicznym przeprowadzającym różnowartościowo wierzchołki k w punkty postaci e_i (dla $1 \leq i \leq m$). Określamy *metrykę* l^1 na K jako przeciągnięcie metryki l^1 przez f:

$$d_K(x, y) = \|f(x) - f(y)\|_1 \qquad \text{dla } x, y \in K.$$

Uwaga 4.12. Metryka otrzymana za pomocą definicji 4.11 nie zależy od wyboru m oraz f, ponieważ dowolne inne zanurzenie aficznie $f' : K \to \mathbb{R}^{m'}$ musi być (po obcięciu do K) złożeniem f z pewnym przekształceniem liniowym permutującym wybrane współrzędne w $\mathbb{R}^m$ oraz $\mathbb{R}^{m'}$ i zachowującym pozostałe, zaś takie przekształcenia są izometriami w normie $\|\cdot\|_1$.

Uwaga 4.13. Ponieważ w definicji 4.11 mamy $f(K) \subseteq \{(x_i) \,|\, x_i \geq 0 \text{ dla } 1 \leq i \leq m,\ \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$, łatwo wywnioskować stąd, że dowolny kompleks K ma w metryce l^1 średnicę co najwyżej 2.

Definicja 4.14. Niech $(K_i, f_i)_{i \geq 0}$ będzie systemem odwrotnym wielościanów. Dla dowolnego rzeczywistego $a > 1$ określamy metrykę d_a^M na granicy $\varprojlim K_i$ wzorem

$$d_a^M\big((x_i)_{i\geq 0}, (y_i)_{i \geq 0}\big) = \sum_{i=0}^{\infty} a^{-i} \cdot d_{K_i}(x_i, y_i).$$

Uwaga 4.15. Definicja 4.14 sprowadza się w przypadku $a = 2$ do klasycznej metryki używanej w produktach przeliczalnych (i w szczególności granicach systemów odwrotnych); w szczególności znanym faktem jest zgodność metryki d_2^M z naturalną topologią (tzn. obciętą produktową Tichonowa) w granicy odwrotnej. Fakt ten uzasadnia się jednak równie łatwo dla dowolnej innej wartości $a > 1$ (patrz np. [5, uwaga po twierdzeniu 4.2.2]).

Definicja 4.16. *Metryką symplicjalną* d_a^M na brzegu grupy hiperbolicznej G (z parametrem $a > 1$) nazywamy przeniesienie na ∂G metryki d_a^M na granicy odwrotnej systemu $(K_i, f_i)_{i\geq 0}$, otrzymanego z twierdzenia 3.2 dla systemu pokryć $(\mathcal{S}_n)$ określonego w rozdziale 3.3, przez homeomorfizm $\varphi : X \to \varprojlim K_i$ otrzymany również z twierdzenia 3.2.

4.4.2 Bilipschitzowska równoważność metryki symplicjalnej z wizualną

Twierdzenie 4.17. *Niech G będzie skończenie generowaną grupą hiperboliczną. Wówczas istnieje stała $a_1 > 1$ (zależna jedynie od G) taka, że dla dowolnej wartości $a \in (1, a_1)$ metryka symplicjalna na przestrzeni ∂G z parametrem a (określona powyżej) jest bilipschitzowsko równoważna z metryką wizualną z tym samym parametrem a (opisaną w definicji 1.8).*

Uwaga 4.18. Z definicji 1.8 wynika natychmiast, że dla wykazania twierdzenia wystarczy sprawdzić bilipschitzowską równoważność określonej tam funkcji odległości d z metryką symplicjalną.

Fakt 4.19. *Jeśli s_1, s_2 są rozłącznymi sympleksami w kompleksie K, to dla dowolnych $z_1 \in S_1, z_2 \in S_2$ zachodzi $d_K(z_1, z_2) = 2$.*

Dowód. Niech $f : K \to \mathbb{R}^m$ spełnia warunki definicji 4.11. Dla $j = 1, 2$ niech A_j oznacza zbiór takich indeksów $1 \leq i \leq m$, dla których $e_i = f(v)$ dla pewnego wierzchołka $v \in s_j$. Wówczas mamy:

$$f(s_j) = \Big\{(x_i) \in \mathbb{R}^m \;\Big|\; x_i \geq 0 \text{ dla } 1 \leq i \leq m, \quad x_i = 0 \text{ dla } i \in A_j, \quad \sum_{i \in A_j} x_i = 1\Big\}.$$

Jednak skoro f jest włożeniem, to zbiory A_1, A_2 są rozłączne, a stąd łatwo wynika, że dla dowolnych $p_j \in f(s_j)$ (dla $j = 1, 2$) zachodzi $\|p_1 - p_2\|_1 = 2$. □

Lemat 4.20. *Istnieją stałe D_1, N_4 (zależne jedynie od G) takie, że jeśli $k, l \geq 0$, $N > N_4$ oraz $g, x \in G$ oraz $p, q \in \partial G$ spełniają warunki*

$$|x| = k, \qquad |gx| = l, \qquad T_N^b(x) = T_N^b(gx), \qquad p \in \operatorname{span}(x), \qquad d(p, q) \leq a^{-(k+D_1)},$$

to w ∂G zachodzi

$$d(g \cdot p,\, g \cdot q) \leq a^{-(l-k)} \cdot d(p, q). \tag{4.6}$$

Uwaga 4.21. Jeśli wykażemy w ogólności nierówność (4.6), to tym samym zapewnimy, że można ją wzmocnić do równości. Jest tak, ponieważ jeśli elementy g, x, p, q spełniają założenia lematu, to z jego tezy wynika, że założenia te spełniają również elementy $g^{-1}, gx, g \cdot p, g \cdot q$, zaś stosując lemat dla nich otrzymujemy, że $d(p, q) \leq a^{-(k-l)} \cdot d(g \cdot p, g \cdot q)$, co zapewnia równość w (4.6). Nie uwzględniamy jednak tego faktu w treści lematu, ponieważ nie będzie nam on potrzebny w dalszej części pracy.

Dowód lematu 4.20. Przyjmujemy

$$D_1 = 13\delta, \qquad N_4 = N_0 + 64\delta,$$

gdzie N_0 oznacza stałą z lematu 2.13.

1. Niech γ oznacza pewną geodezyjną łączącą p z q, dla której odległość $d(e, \gamma)$ jest maksymalna. Zauważmy, że wówczas

$$d(e, \gamma) = -\log_a d(p, q) \geq k + 13\delta.$$

Ponieważ lewostronne przesunięcie o g jest izometrią w G, ciąg $g \cdot \gamma$ zadaje obustronnie nieskończoną geodezyjną, która z definicji łączy punkty $\gamma{\cdot}p, \gamma{\cdot}q$ w ∂G. Wobec tego dla ukończenia dowodu wystarczy ograniczyć z dołu odległość $d(e, g \cdot \gamma)$.

2. Niech α, β będą dowolnymi geodezyjnymi łączącymi e odpowiednio z p i q; możemy przy tym wymagać, aby $\alpha(k) = x$. Oznaczmy też $y = \beta(k)$.

Ponieważ α, β, γ tworzą trójkąt geodezyjny (o dwóch wierzchołkach w nieskończoności), ze stwierdzenia 1.3.2 w [3] wynika, że istnieje element $s \in \beta \cup \gamma$ odległy o $\leq 12\delta$ od x. Wówczas $\big||s| - k\big| \leq 12\delta$, skąd wynika w szczególności, że $s \notin \gamma$, a więc $s \in \beta$. W tej sytuacji mamy

$$d(x, y) \leq d(x, s) + d(s, y) \leq 12\delta + \big||s| - k\big| \leq 24\delta.$$

3. Dla dowolnego $i \in \mathbb{Z}$ wybierzmy teraz geodezyjną η_i łączącą e z $\gamma(i)$. Ponieważ $\gamma(i)$ musi leżeć w odległości $\leq 12\delta$ od pewnego elementu α lub β, stosując wniosek 2.2 dla geodezyjnej η_i i odpowiednio α lub β otrzymujemy, że punkt $z_i = \eta(k)$ leży w odległości $\leq 40\delta$ odpowiednio od x lub y, a zatem w każdym wypadku mamy

$$d(x, z_i) \leq 64\delta.$$

4. W dalszym ciągu rozpatrujemy dowolne $i \in \mathbb{Z}$. Skoro $N > N_4$ oraz $T^b_N(x) = T^b_N(gx)$, a także $|x| = |z_i| = k$, to z faktów 2.14 oraz 3.12 otrzymujemy, że

$$T^b_{N_0}(z_i) = T^b_{N_0}(gz_i), \qquad |gx| = |gz_i| = l.$$

W takim razie z_i i gz_i mają równe typy stożkowe na mocy lematu 2.13, a zatem z $\gamma(i) \in z_i T^c(z_i)$ wynika $g\gamma(i) \in gz_i T^c(gz_i)$, a stąd

$$|g\gamma(i)| = |gz_i| + |z_i^{-1}\gamma(i)| = |gz_i| + |\gamma(i)| - |z_i| = |\gamma(i)| + (l - k).$$

Biorąc minimum po wszystkich $i \in \mathbb{Z}$ otrzymujemy, że

$$d(e, g \cdot \gamma) = d(e, \gamma) + (l - k),$$

skąd wynika, że

$$d(g \cdot p, g \cdot q) \leq d(p, q) \cdot a^{-(l-k)}. \qquad \square$$

Fakt 4.22. *Istnieje stała D (zależna jedynie od G) taka, że dla dowolnego $k \geq 0$ liczba Lebesgue'a pokrycia $\mathcal{S}_k$ wynosi przynajmniej $D \cdot a^{-k}$.*

Dowód. Niech $N > N_4$ (gdzie N_4 jest stałą z lematu 4.20) i niech $M > 0$ będzie dobrane tak, by dla każdego $g \in G$ istniało $h \in G$ takie, że $T^b_N(g) = T^b_N(h)$ oraz $|h| < M$. Przez L_j oznaczmy stałą Lebesgue'a dla pokrycia $\mathcal{S}_j$ dla $j < M$. Wykażemy, że tezę faktu spełnia liczba

$$D = a^{-D_1} \cdot \min_{j<M} (a^j L_j),$$

gdzie D_1 jest stałą z lematu 4.20.

Niech $k \geq 0$ i $B \subset \partial G$ będzie niepustym podzbiorem o średnicy co najwyżej $D \cdot a^{-k}$. Niech będzie dowolnym elementem B; wówczas $x \in \operatorname{span}(g)$ dla pewnego $g \in G$ takiego, że $|g| = k$. Z definicji stałej M istnieje $h \in G$ takie, że

$$|h| < M, \qquad T^b_N(g) = T^b_N(h).$$

Z lematu 4.20 otrzymujemy, że

$$\operatorname{diam}(\gamma \cdot B) \leq D \cdot a^{-k} \cdot a^{-(|h|-k)} \leq a^{-|h|} \cdot \min_{j<M}(a^j L_j) \leq L_{|h|},$$

co oznacza, że istnieje $h' \in G$ takie, że $|h'| = |h|$ oraz $\gamma \cdot B \subseteq S_{h'}$.

Zauważmy teraz, że z faktu 3.14, a następnie własności (QI4a) wynika, że

$$\gamma \cdot x \in \gamma \cdot \operatorname{span}(g) \subseteq \gamma \cdot S_g = S_h,$$

zatem $\gamma \cdot x$ jest punktem wspólnym S_h i $S_{h'}$. W takim razie z (QI4b) otrzymujemy, że

$$S_{\gamma^{-1}h'} = \gamma^{-1} \cdot S_{h'} \supseteq B. \qquad \square$$

Dowód twierdzenia 4.17. Niech n oznacza maksymalny wymiar sympleksu w systemie (K_i), zaś a_0 — stałą z definicji 1.8. Przyjmujemy

$$a_1 = \min\left(a_0, \tfrac{n+1}{n}\right).$$

Niech $1 < a < a_1$. Oznaczmy przez M średnicę ∂G względem metryki wizualnej (skończoną z powodu zwartości ∂G), zaś przez C_1 stałą określającą bilipschitzowską równoważność między funkcją d i metryką wizualną.

Niech p, q będą dwoma różnymi elementami ∂G i niech $k \geq 0$ będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której $d(p,q) > a^{-k}$. Zauważmy najpierw, że dla $k > 0$ mamy $d(p,q) \leq a^{-(k-1)}$, zaś w przeciwnym razie $d(p,q) \leq MC_1 \leq MC_1 \cdot a^{-(k-1)}$, zatem w ogólności

$$d(p,q) \leq M' \cdot a^{-(k-1)}, \qquad \text{gdzie} \qquad M' = \max(MC_1, 1). \tag{4.7}$$

Najpierw oszacujemy $d_a^M(p,q)$ z góry. Niech l będzie największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą $k - log_a D$. Rozpatrujemy dwa przypadki:

- Jeśli $l < 0$, to zachodzi $k < log_a D$, a stąd na mocy uwagi 4.13

$$d_a^M(p,q) = \sum_{t=0}^{\infty} a^{-t} \cdot d_{K_t}\big(\pi_t(p), \pi_t(q)\big) \leq \sum_{t=0}^{\infty} a^{-t} \cdot 2 \leq \frac{2a}{a-1} \leq \frac{2a}{(a-1)MC_1} \cdot d(p,q).$$

- Jeśli $l \geq 0$, to na mocy faktu 4.22 istnieje $U \in \mathcal{S}_l$ zawierające oba punkty p, q. Wówczas w kompleksie K_l punkty $\pi_l(p)$ i $\pi_l(q)$ muszą leżeć w pewnych (być może różnych) sympleksach zawierających wierzchołek v_U, co na mocy uwagi 4.13 oznacza, że

$$d_{K_l}\big(\pi_l(p), v_U\big) \leq 2, \qquad d_{K_l}\big(\pi_l(q), v_U\big) \leq 2.$$

  W tej sytuacji z warunku (3.1) (który możemy wykorzystać, ponieważ używamy tych samych metryk w kompleksach K_i, co dowód twierdzenia 1.13.2 w [6]) otrzymujemy:

$$d_{K_t}\big(\pi_t(p), \pi_t(q)\big) \leq 2 \cdot 2 \cdot \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^{l-t} \qquad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq l.$$

  Wówczas z ograniczenia $\operatorname{diam} K_t \leq 2$ dla $t \geq 0$ (wynikającego z uwagi 4.13) oraz nierówności $\frac{an}{n+1} < 1$ otrzymujemy:

$$d_a^M(p,q) = \sum_{t=0}^{\infty} a^{-t} \cdot d_{K_t}\big(\pi_t(p), \pi_t(q)\big) \leq \sum_{t=0}^{l} a^{-t} \cdot 4 \cdot \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^{l-t} + \sum_{t=l+1}^{\infty} a^{-t} \cdot 2 \leq$$
$$\leq 4a^{-l} \cdot \sum_{t=0}^{l} \left(\tfrac{an}{n+1}\right)^{l-t} + 2 \cdot \sum_{t=l+1}^{\infty} a^{-t} \leq C_2 \cdot a^{-l} \leq (C_2 D a) \cdot a^{-k} \leq (C_2 D a) \cdot d(p,q),$$

  gdzie C_2 jest pewną stałą zależną jedynie od a oraz n (a więc niezależną od p, q).

Nierówność w drugą stronę otrzymamy przy użyciu faktu 3.16. Niech C oznacza stałą z tego faktu, i niech l' będzie najmniejszą liczbą całkowitą większą niż $k + \log_a(3C)$. Wówczas fakt 3.16 zapewnia, że dla dowolnych $t \geq l'$ oraz $U \in \mathcal{S}_t$ zachodzi

$$\operatorname{diam}_d U \leq 3C \cdot a^{-t} \leq a^{-k} < d(p,q),$$

zatem punkty p, q nie mogą naraz należeć do żadnego elementu pokrycia $\mathcal{S}_t$. Wówczas z opisu przekształcenia π_t (podanego w treści twierdzenia 3.2) wynika, że punkty $\pi_t(p)$, $\pi_t(q)$ leżą w pewnych dwóch rozłącznych sympleksach w kompleksie K_t, skąd na mocy faktu 4.19 wynika, że ich odległość wynosi 2. W takim razie korzystając z (4.7) mamy:

$$d_a^M(p,q) = \sum_{t=0}^{\infty} a^{-t} \cdot d_{K_t}\big(\pi_t(p), \pi_t(q)\big) \geq \sum_{t=l'}^{\infty} a^{-t} \cdot 2 \geq \frac{2a^{-l'} \cdot a}{a-1} \geq \tfrac{2}{3C(a-1)} \cdot a^{-k} \geq \tfrac{2}{3CM'a(a-1)} \cdot d(p,q).$$

To kończy dowód na mocy uwagi 4.18. □

Rozdział 5

Wzmocnione typy

W tym rozdziale zajmujemy się zbudowaniem nowych *funkcji typu* w grupie G (bądź w otrzymanym dla niej w rozdziale 3 systemie odwrotnym (K_n)) — tzn. przyporządkowań elementom G (bądź sympleksom w K_n) wartości *typu*, wybranej z pewnego skończonego zbioru — w sposób spełniający warunki regularności, potrzebne w niektórych dowodach w dalszych rozdziałach.

Podstawowym interesującym nas warunkiem jest tutaj różnie rozumiany "determinizm dziecięcy": typ elementu (sympleksu) powinien wyznaczać typy jego "dzieci" w sposób analogiczny do własności typu kulowego T_N^b opisanych w lemacie 2.15. Najważniejszym usprawnieniem dokonanym w tym rozdziale jest konstrukcja typu (który nazwiemy *B-typem* i oznaczymy T^B), który oprócz owego determinizmu cechuje się zwracaniem różnych wartości dla dowolnej pary r-towarzyszy w grupie G (definicja 3.11) przy pewnej ustalonej wartości r. (Dla celów tej pracy przyjmiemy $r = 16\delta$). Własność ta okaże się kluczowa w trzech wątkach dalszej części pracy:

- W rozdziale 5.4 pokażemy, że umieszczając typ T^B wśród danych wejściowych dla twierdzenia 4.1, możemy zapewnić, że otrzymany kompakt Markowa jest właściwy (definicja 1.13), co zapewni jego skończoną opisywalność (uwaga 1.14);
- W rozdziale 6 na własności rozróżniania towarzyszy dla typu T^B oprzemy przedstawienie brzegu ∂G jako przestrzeni semi-markowowskiej (definicja 6.5);
- W rozdziale 7 własność ta umożliwi "quasi-G-niezmienniczą kontrolę wymiaru" sympleksów w systemie (K_n).

Warto tu od razu zaznaczyć, że własność tę znacznie łatwiej zapewnić w przypadku grup beztorsyjnych (patrz wstęp do rozdziału 5.3).

Naturalnym przedłużeniem tematyki tego rozdziału będzie też rozdział 6.4, w którym na podstawie B-typu określimy *C-typ* służący bezpośrednio za podstawę przedstawienia semi-markowowskiego ∂G. Jego omówienie umieszczamy w rozdziale 6, ponieważ tylko tam zostanie wykorzystane; dzięki temu będziemy też mogli (w rozdziale 6.3) umotywować definicję typu T^C poprzez opisanie pożądanych własności jej wyniku.

Założenia techniczne

W rozdziałach 5–7 zakładamy, że N i L są ustalonymi i odpowiednio dużymi stałymi; konkretne ograniczenia dolne dobierzemy w miarę dowodzenia kolejnych faktów. (Konkretniej, ostatecznie założymy, że N spełnia założenia wniosku 5.4 oraz lematu 5.17, zaś $L \geq \max(N+4\delta, 14\delta)$ spełnia założenia faktu 5.11; niektóre z tych ograniczeń wykorzystamy dopiero w rozdziale 7). Zauważmy od razu, że przy takim doborze założeń lemat 2.15 zapewnia, że typ $T^b_N(x)$ wyznacza typy T^b_N potomków x o długości $\geq |x| + L$.

Konstruowane przez nas będą — podobnie jak typ kulowy T^b — zależne od wartości parametru N, który jednak (w świetle powyższych ustaleń) dla uproszczenia pominiemy w notacji.

Zakładamy również, że wybrany przez nas zbiór S generatorów grupy G jest zamknięty na branie odwrotności, i ustalamy pewne uporządkowanie elementów S w ciąg $s_1, \ldots, s_Q$. (Zostanie to wykorzystane w rozdziale 5.1).

5.1 Przodkowie priorytetowi

Definicja 5.1. Niech $x, y \in G$. Powiemy, że y jest *potomkiem* x, jeśli $|y| = |x| + d(x,y)$. (Równoważnie: jeśli $y \in xT^c(x)$). W tej sytuacji powiemy, że x jest *przodkiem* y.

Jeśli dodatkowo $d(x,y) = 1$, powiemy, że y jest *dzieckiem* x, zaś x *rodzicem* y.

Definicja 5.2. *Rodzicem priorytetowym* (albo *p-rodzicem*) elementu $y \in G \setminus \{e\}$ nazwiemy takie $x \in G$, że x jest rodzicem y oraz $x = ys_i$ dla najmniejszego możliwego i. Rodzica priorytetowego y oznaczymy symbolem $y^\uparrow$. Element $g' \in G$ nazwiemy *dzieckiem priorytetowym* (albo *p-dzieckiem*) g, jeśli g jest jego p-rodzicem.

Zauważmy, że dany element $G \setminus \{e\}$ ma dokładnie jednego p-rodzica, ale może mieć wiele p-dzieci.

Relację *p-przodka* (odp. *p-potomka*) definiujemy jako domknięcie zwrotno-przechodnie relacji p-rodzica (odp. p-dziecka); w szczególności dla dowolnego $g \in G$ oraz $k \leq |g|$ element g ma dokładnie jednego p-przodka g' takiego, że $|g'| = |g| - k$, którego oznaczymy przez $g^{\uparrow k}$.

Niech N_0 oznacza stałą pochodzącą z lematu 2.13.

Fakt 5.3. *Niech $x, y, s \in G$ spełniają $T^b_{N_0+2}(x) = T^b_{N_0+2}(y)$ oraz $|s| = 1$. Wówczas $(xs)^\uparrow = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(ys)^\uparrow = y$.*

Dowód. Ponieważ zbiór S jest zamknięty na odwracanie, mamy $s = s_i^{-1}$ dla pewnego i. Załóżmy, że $(xs_i^{-1})^\uparrow = x$, ale $(ys_i^{-1})^\uparrow = z \neq y$. Wówczas $z = ys_i^{-1}s_j$ dla pewnego $j < i$. Zauważmy, że $d(y,z) \leq 2$. Określmy $z' = xs_i^{-1}s_j$; wówczas na mocy faktu 2.14 i następnie lematu 2.13 mamy

$$T^b_{N_0}(z') = T^b_{N_0}(z), \qquad s_j \in T^c(z) = T^c(z').$$

Oznacza to, że element $xs_i^{-1} = z's_j^{-1}$ jest dzieckiem z', a skoro $j < i$, nie może być p-dzieckiem x. $\square$

Wniosek 5.4. *Niech $N \geq N_5 := 2N_0 + 8\delta + 2$. Wówczas jeśli $x, y \in G$ spełniają $T^b_N(x) = T^b_N(y)$, to lewostronne przesunięcie o element $\gamma = yx^{-1}$ zadaje bijekcję między p-potomkami x a p-potomkami y.*

Dowód. Niech z będzie p-potomkiem x; chcemy wykazać, że γz jest p-potomkiem y. Wykażemy to przez indukcję ze względu na różnicę $|z| - |x|$.

Jeśli $|z| = |x|$, teza jest oczywista. Załóżmy więc, że $|z| > |x|$ i oznaczmy $w = z^\uparrow$; wówczas w jest p-potomkiem x, dla którego możemy zastosować założenie indukcyjne, otrzymując, że γw jest p-potomkiem y. Dla ukończenia dowodu wystarczy wykazać, że

$$T^b_{N_0+2}(w) = T^b_{N_0+2}(\gamma w), \tag{5.1}$$

ponieważ wówczas z faktu 5.3 wyniknie, że γz jest p-dzieckiem γw, a więc również p-potomkiem y. W tym celu rozważamy dwa przypadki:

- Jeśli $d(z, x) \leq N - (N_0 + 2)$, (5.1) wynika z równości $T_N^b(x) = T_N^b(y)$ oraz faktu 2.14.
- Jeśli $|z| - |x| \geq N_0 + 4\delta + 2$, (5.1) wynika (wobec równości $T_N^b(x) = T_N^b(y)$ oraz nierówności $N \geq N_0 + 8\delta$) z lematu 2.15.

Ponieważ $d(z, x) = |z| - |x|$ (jako że z jest potomkiem x) oraz $N \geq 2N_0 + 4\delta + 2$, co najmniej jeden z przypadków musi wystąpić, co kończy dowód. $\square$

5.2 Typ T^A

Niech $\mathcal{T}_N^b$ oznacza zbiór wartości typu T_N^b. Zanim przystąpimy do bardziej systemowego wzmacniania typów, zdefiniujmy w G *Z-typ* T^Z tak, by:

- T^Z był zgodny z T_N^b dla wszystkich elementów $g \in G$ o długości $\geq L$;
- T^Z przyporządkowywał elementom o długości $< L$ parami różne abstrakcyjne wartości, niewystępujące w $\mathcal{T}_N^b$.

Zauważmy, że tak określone wzmocnienie zachowuje większość własności typu T_N^b, w szczególności te opisane w lemacie 2.15 oraz wniosku 5.4.

Uwaga 5.5. Typ T^Z zależy od wartości N, jednak dla uproszczenia notacji pomijamy w niej ten indeks uznając, że N jest ustalone. Nie jesteśmy jeszcze gotowi przedstawić dokładnego ogranicznego dolnego na jego wybór. Nastąpi to dopiero w lemacie 5.17.

Niech $\mathcal{T}^Z$ oznacza zbiór możliwych wartości typu T^Z. Dla dowolnego $\tau \in \mathcal{T}^Z$ wybierzmy pewnego *reprezentanta* $g_\tau \in G$ tego typu. Dla wygody oznaczamy przez γ_g lewostronne przesunięcie między elementem g a wybranym reprezentantem jego typu:

$$\gamma_g = g_{T^Z(g)}\, g^{-1} \qquad \text{dla} \quad g \in G.$$

Przypomnijmy, że na mocy wniosku 5.4 lewostronne przesunięcie o γ_g zadaje bijekcję między p-potomkami g oraz p-potomkami $g_{T^Z(g)}$, a więc również bijekcję między p-wnukami tych elementów.

Dla dowolnego $\tau \in \mathcal{T}$ ustalmy w dowolny sposób numerację wszystkich p-wnuków elementu g_τ.

Definicja 5.6. *Numerem potomnym* elementu $g \in G$ (ozn. n_g) nazwiemy dla $|g| \geq L$ numer nadany elementowi $\gamma_{g^\Uparrow} \cdot g$ jako p-wnukowi $g_{T^Z(g^\Uparrow)}$. Jeśli $|g| < L$, przyjmujemy $n_g = 0$.

Definicja 5.7. Definiujemy *A-typ* elementu $g \in G$ jako parę $T^A(g) = (T^Z(g), n_g)$.

Zauważmy, że zbiór $\mathcal{T}^A$ możliwych A-typów jest skończony, ponieważ liczba p-wnuków g zależy wyłącznie od $T^Z(g)$.

Fakt 5.8. *Dla dowolnych dwóch różnych elementów $g, g' \in G$ o równej długości istnieje $k \geq 0$ takie, że $g^{\Uparrow k}$ i $g'^{\Uparrow k}$ istnieją i mają różne A-typy.*

Dowód. Niech $n = |g| = |g'|$ i niech $k \geq 0$ będzie najmniejszą liczbą, dla której $g^{\Uparrow k} \neq g'^{\Uparrow k}$. Jeśli $n - kL < L$, to z definicji $g^{\Uparrow k}, g'^{\Uparrow k}$ mają różne Z-typy. W przeciwnym razie mamy $g^{\Uparrow k+1} = g'^{\Uparrow k+1}$, co oznacza, że $g^{\Uparrow k}$ i $g'^{\Uparrow k}$ mają różne numery potomne. □

Fakt 5.9. *Jeśli $g, h \in G$ mają równe Z-typy, to lewostronne przesunięcie o $\gamma = hg^{-1}$ przeprowadza p-wnuków g na p-wnuków h z zachowaniem ich A-typów.*

Dowód. Oznaczmy $\tau = T^Z(g) = T^Z(h)$. Niech g' będzie p-wnukiem g; wówczas $\gamma g'$ jest p-wnukiem h na mocy wniosku 5.4. Ponadto z lematu 2.15 wynika, że g' i $\gamma g'$ mają równe typy kulowe T_N^b, a ponieważ oba mają długość $\geq L$, wynika stąd równość ich Z-typów. Mają również równe numery potomne, ponieważ

$$\gamma_{(\gamma g')^{\Uparrow}} \gamma g' = g_\tau \, h^{-1} \, \gamma \, g' = g_\tau \, g^{-1} \, g' = \gamma_{g'^{\Uparrow}} \, g'.$$

□

5.3 Kuzyni i typ T^B

Celem tego podrozdziału jest wzmocnienie funkcji typu tak, aby zwracała różne wartości dla dowolnej pary bliskich elementów w G mających równą długość. Dla grupy beztorsyjnej nie byłoby takiej potrzeby, ponieważ pożądaną własność miałby już typ kulowy T_N^b (na mocy faktu 2.16). Główna idea polega na zapamiętaniu w typie danego elementu $g \in G_n$ kluczowej różnicy genealogicznej między g a jego *kuzynami* (tj. pobliskimi mu elementami $g' \in G_n$ — patrz definicja 5.10), a konkretniej — A-typów ich p-przodków w najdawniejszym pokoleniu, w którym owi p-przodkowie byli różni. Okazuje się jednak, że w celu zachowania pożądanych własności regularności musimy pamiętać nie tylko dane odróżniające g od jego kuzynów, ale również te odróżniające kuzynów między sobą.

Oznaczmy

$$\begin{aligned} Tor &= \big\{ g \in G \,\big|\, |g| \leq 16\delta,\ g \text{ jest torsyjny} \big\}, \\ R &= \max\Big(\big\{ |g^n| \,\big|\, g \in Tor,\ n \in \mathbb{Z} \big\} \cup \{16\delta\} \Big). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Z nierówności $|Tor| < \infty$ wynika, że zachodzi $R < \infty$.

Definicja 5.10. Elementy $g, g' \in G$ nazwiemy *kuzynami*, jeśli $|g| = |g'|$ oraz $d(g, g') \leq R$. Zbiór kuzynów g oznaczymy przez C_g. (Jest to dokładnie zbiór $gP_R(g)$ wg oznaczeń z rozdziału 3.3).

Zauważmy, że jeśli $g, h \in G$ są sąsiadami (wg definicji 6.11), to są też kuzynami.

Fakt 5.11. *Jeśli $L \geq \frac{R}{2} + 4\delta$, to dla dowolnych kuzynów $g, g' \in G$ ich p-dziadkowie są sąsiadami (a więc również kuzynami).*

Dowód. Jest to natychmiastowy wniosek z faktu 2.1. □

Dla $g \in G$ długości n oraz dowolnych różnych $g', g'' \in C_g$ niech $k_{g',g''}$ będzie najmniejszą wartością $k \geq 0$, dla której $g'^{\Uparrow k}$ i $g''^{\Uparrow k}$ mają różne A-typy (co jest poprawną definicją na mocy faktu 5.8). Niech ciąg $k^{(g)} = (k_i^{(g)})_{i=1}^{M_g}$ powstaje przez uporządkowanie malejąco elementów zbioru $\{k_{g',g''} \,|\, g', g'' \in C_g\} \cup \{0\}$.

Definicja 5.12. *B-typem* elementu g nazywamy zbiór

$$T^B(g) = \Big\{ \big(g^{-1}g',\, W_{g,g'}\big) \;\Big|\; g' \in C_g \Big\}, \qquad \text{gdzie} \qquad W_{g,g'} = \Big(T^A\big(g'^{\Uparrow k_i^{(g)}}\big) \Big)_{i=1}^{M_g}.$$

(Przypominamy, że w notacji ukrywamy zależność typów od ustalonego parametru N, który zostanie dobrany w lemacie 5.17).

Uwaga 5.13. Ponieważ g jest własnym kuzynem, zaś 0 jest ostatnią wartością w ciągu $(k_i^{(g)})$, zbiór $T^B(g)$ zawiera w szczególności parę postaci $\big(e, (\ldots, T^A(g))\big)$, a więc B-typ wyznacza A-typ.

Uwaga 5.14. Dla dowolnych różnych $g', g'' \in C_g$ niech $i_{g',g''}^{(g)}$ oznacza indeks wartości $k_{g',g''}$ w ciągu $k^{(g)}$. Wówczas z definicji wynika, że indeks ten zależy jedynie od ciągów $W_{g,g'}$ i $W_{g,g''}$, a dokładniej jest równy największemu i, dla którego i-te współrzędne tych ciągów są różne. (Przy okazji widzimy też, że ciągi $W_{g,g'}$, $W_{g,g''}$ muszą być różne). Fakt ten wykorzystamy w dowodach lematów 5.16 i 5.17.

Fakt 5.15. *Istnieje skończenie wiele możliwych B-typów w G.*

Dowód. Skończoność A-typu wynika z jego definicji. Jeśli $g' \in C_g$, to element $g^{-1}g'$ należy do kuli $B(e, R)$ w G, której rozmiar jest skończony i niezależny od g. Z ograniczenia liczby kuzynów g wynika zarazem ograniczenie długości ciągu $(k_i^{(g)})$, co zapewnia skończoność wyboru ciągów $W_{g,g'}$. □

Lemat 5.16. *Niech $g_1, h_1 \in G$ mają równe B-typy oraz $\gamma = h_1 g_1^{-1}$. Wówczas lewostronne przesunięcie o γ przeprowadza p-wnuki g_1 na p-wnuki h_1 z zachowaniem ich B-typu.*

Dowód. **1.** Niech g_2 będzie p-wnukiem g_1 oraz $h_2 = \gamma g_2$. Wówczas $h_1 = h_2^{\Uparrow}$ na mocy uwagi 5.13 oraz faktu 5.9; pozostaje sprawdzić, że $T^B(g_2) = T^B(h_2)$. Ponieważ lewostronne mnożenie przez γ w oczywisty sposób zadaje bijekcję między kuzynami g_2 i kuzynami h_2, wystarczy pokazać, że dla każdego $g_2' \in C_{g_2}$ zachodzi

$$W_{g_2, g_2'} = W_{h_2, h_2'}, \qquad \text{gdzie} \quad h_2' = \gamma g_2'. \tag{5.3}$$

2. Niech g_2', h_2' będą jak powyżej. Oznaczmy $g_1' = g_2'^{\Uparrow}$; na mocy faktu 5.11 g_1' jest kuzynem g_1. Wówczas element $h_1' = \gamma g_1'$ jest kuzynem h_1, zaś z równości $T^B(g_1) = T^B(h_1)$ oraz $g_1^{-1}g_1' = h_1^{-1}h_1'$ wynika, że

$$W_{g_1, g_1'} = W_{h_1, h_1'}. \tag{5.4}$$

Ponieważ 0 jest ostatnim elementem zarówno w ciągu $(k_i^{(g_1)})$, jak też w $(k_i^{(h_1)})$, wynika stąd w szczególności, że $T^A(g_1') = T^A(h_1')$. Z faktu 5.9 otrzymujemy:

$$h_1' = h_2'^{\Uparrow}, \qquad T^A(g_2') = T^A(h_2'). \tag{5.5}$$

3. Dla dowolnie wybranych $g_2', g_2'' \in C_{g_2}$ przyjmijmy oznaczenia:

$$h_2' = \gamma\, g_2', \qquad h_2'' = \gamma\, g_2'', \qquad \tau' = T^A(g_2') = T^A(h_2'), \qquad \tau'' = T^A(g_2'') = T^A(h_2'').$$

Ponadto oznaczmy przez g_1', g_1'', h_1', h_1'' odpowiednio p-dziadków g_2', g_2'', h_2', h_2''. Wówczas z definicji:

$$k_{g_2',g_2''} = \begin{cases} k_{g_1',g_1''} + 1, & \text{gdy } \tau' = \tau'', \\ 0, & \text{gdy } \tau' \neq \tau'' \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad k_{h_2',h_2''} = \begin{cases} k_{h_1',h_1''} + 1, & \text{gdy } \tau' = \tau'', \\ 0, & \text{gdy } \tau' \neq \tau''. \end{cases} \tag{5.6}$$

Wynika stąd, że ciągi $(k_j^{(g_2)})$ oraz $(k_j^{(h_2)})$ powstają odpowiednio z $(k_i^{(g_1)})$ oraz $(k_i^{(h_1)})$ poprzez wykreślenie niektórych elementów, powiększenie pozostałych o 1, oraz dopisanie na końcu wartości 0. Wobec tego dla dowolnego $g_2' \in C_{g_2}$ ciągi $W_{g_2,g_2'}$ i $W_{h_2,h_2'}$ powstają poprzez wykreślenie elementów o odpowiadających indeksach odpowiednio z $W_{g_1,g_1'}$ i $W_{h_1,h_1'}$ oraz dopisanie na końcu wartości $T^A(g_2')$ i odpowiednio $T^A(h_2')$, które są identyczne na mocy (5.5). (Powiększanie wartości w ciągu $(k_j^{(g_2)})$ o 1 tłumaczy się na brak zmian wartości w ciągu $W_{g_2,g_2'}$ ze względu na tożsamość $g_2'^{\Uparrow k+1} = g_1'^{\Uparrow k}$).

W takim razie dla ukończenia dowodu (tj. wykazania (5.3)) wystarczy wobec (5.4) sprawdzić, że z ciągów $(k_i^{(g_1)})$ oraz $(k_i^{(h_1)})$ wykreślane są elementy o tych samych indeksach.

4. Z (5.6) wynika, że wartość $k_i^{(g_1)} + 1$ pojawia się w ciągu $(k_j^{(g_2)})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $g_2', g_2'' \in C_{g_2}$ takie, że (używając oznaczeń z poprzedniego punktu):

$$T^A(g_2') = T^A(g_2''), \qquad i = i^{(g_1)}_{g_1', g_1''}. \tag{5.7}$$

Wówczas jednak z uwagi 5.14 oraz równości (5.4) zastosowanej dla par (g_1', h_1') i (g_1'', h_1'') wnioskujemy, że $i^{(h_1)}_{h_1', h_1''} = i^{(g_1)}_{g_1', g_1''} = i$, zaś z (5.7) i (5.5) mamy $T^A(h_2') = T^A(h_2'')$, zatem analogicznie dostajemy wynikanie, że wartość $k_i^{(h_1)} + 1$ pojawia się w ciągu $(k_j^{(h_2)})$. Analogicznie dowodzimy implikacji przeciwnej: jeśli $k_i^{(h_1)} + 1$ pojawia się w $(k_j^{(h_2)})$, to $k_i^{(g_1)} + 1$ musi wystąpić w $(k_j^{(g_2)})$.

Otrzymana równoważność kończy dowód. □

Lemat 5.17. *Jeśli N jest dostatecznie duże, to dla dowolnych $g, h \in G_n$ spełniających $d(g,h) \leq 16\delta$ z równości $T^B(g) = T^B(h)$ wynika równość $g = h$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $g \neq h$, ale $T^B(g) = T^B(h)$. Wówczas na mocy uwagi 5.13 $T^A(g) = T^A(h)$, a stąd $T^b_N(g) = T^b_N(h)$. Oznaczmy $\gamma = g^{-1}h$ i załóżmy, że parametr N jest większy niż stała N_r otrzymana w fakcie 2.16 dla $r = 16\delta$. Wówczas z faktu tego wynika, że γ jest elementem torsyjnym, czyli (używając oznaczeń (5.2)) $\gamma \in Tor$, a więc $|\gamma^i| \leq R$ dla wszystkich $i \in \mathbb{Z}$. Wobec tego zbiór $A = \{g\gamma^i \,|\, i \in \mathbb{Z}\}$ ma średnicę nie większą niż od R, zatem dowolne dwa jego elementy są kuzynami. Przy tym A zawiera g i h.

Wynika stąd, że elementy zbioru $K = \{k_{g', g''} \,|\, g', g'' \in A,\ g' \neq g''\}$ występują zarówno w ciągu $k^{(g)}$, jak i w $k^{(h)}$; co więcej, z uwagi 5.14 wynika, że w ciągu $k^{(g)}$ występują one dokładnie na indeksach ze zbioru

$$I_1 = \Big\{ \max\{j \,|\, (W)_j \neq (W')_j\} \,\Big|\, (\gamma^i, W),\, (\gamma^{i'}, W') \in T^B(g),\ i, i' \in \mathbb{Z},\ \gamma^i \neq \gamma^{i'} \Big\},$$

gdzie przez $(W)_j$ oznaczyliśmy j-ty element ciągu W. Podobnie, elementy zbioru K występują w ciągu $k^{(h)}$ dokładnie na indeksach ze zbioru I_2, zdefiniowanego analogicznie: wystarczy zastąpić jedyne wystąpienie g przez h. Jednak z założenia $T^B(g) = T^B(h)$, a więc musi zachodzić $I_1 = I_2$.

Rozważmy teraz parę $(\gamma, W_{g,h})$ występującą w $T^B(g)$; z równości $T^B(g) = T^B(h)$ wynika, że

$$(\gamma, W_{g,h}) = (h^{-1}h', W_{h,h'}) \qquad \text{dla pewnego } h' \in C_h.$$

Ponieważ zbiory indeksów I_1, I_2 są równe, z równości $W_{g,h} = W_{h,h'}$ wynika w szczególności, że

$$T^A(h^{\Uparrow k}) = T^A(h'^{\Uparrow k}) \qquad \text{dla każdego } k \in K.$$

Jednak z $h^{-1}h' = \gamma$ wynika, że $h' \in A \setminus \{h\}$, a więc $k_{h,h'} \in K$, co przeczy powyższej równości. □

5.4 Wzmocnienie typów w kompaktach Markowa

Twierdzenie 5.18. *Niech $(\mathcal{U}_n)$ będzie quasi-G-niezmienniczym systemem pokryć przestrzeni X, w którym funkcja typu jest mocniejsza od typu T^B, zaś stała sąsiedztwa D nie przekracza 16δ. Niech (K_n, f_n) będzie systemem odwrotnym otrzymanym z zastosowania twierdzenia 4.1 dla systemu $(\mathcal{U}_n)$. Wówczas typy sympleksów w systemie (K_n, f_n) można wzmocnić tak, aby spełniał on równocześnie warunki z definicji 1.9 i 1.13. W szczególności, X jest wówczas właściwym, barycentrycznym kompaktem Markowa z własnością rozdrabniania.*

Organizacja dowodu. Rozpatrujemy system odwrotny (K_n, f_n) wraz z nowym typem sympleksów $T^{\Delta+A}$, określonym w definicji 5.24. Wówczas fakty 5.25 i 5.26 zapewniają, że system ten spełnia warunki odpowiednio z definicji 1.9 i 1.13. Ponieważ sam system nie uległ zmianie (zmienia się jedynie funkcja typu), własności rozdrabniania oraz barycentryczności wynikające (przy funkcji typu T^{Δ}) z twierdzenia 4.1 zachowują się. □

Niech T oznacza funkcję typu w systemie $(\mathcal{U}_n)$, zaś T^{Δ} — odpowiadającą jej funkcję typu sympleksu w systemie (K_n), określoną w rozdziale 4.1.

Fakt 5.19. *Dla dowolnego sympleksu $s \in K_n$ wszystkie podsympleksy $s' \subseteq s$ mają parami różne typy T^{Δ}.*

Dowód. Niech $v = v_{U_x}$, $v' = v_{U_{x'}}$ będą różnymi wierzchołkami połączonymi krawędzią w K_n. Wówczas, korzystając kolejno z definicji kompleksu K_n, własności (QI2) oraz lematu 5.17, mamy:

$$U_x \cap U_{x'} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad d(x, x') \leq D \leq 16\delta \quad \Rightarrow \quad T^B(x) \neq T^B(x') \quad \Rightarrow \quad T(x) \neq T(x'). \tag{5.8}$$

Przypomnijmy teraz, że na mocy definicji 4.3 dla dowolnego $s = [v_1, \ldots, v_k] \in K_n$ typ $T^{\Delta}(s)$ wyznacza w szczególności zbiór etykiet w grafie G_s (określonym w definicji 4.2), który można opisać wzorem

$$A_s = \left\{ T(x) \;\middle|\; x \in G,\ |x| = n,\ v_{U_x} = v_i \text{ dla pewnego } 1 \leq i \leq k \right\}$$

Jednak z (5.8) wynika, że jeśli dwa sympleksy $s', s'' \subseteq s$ różnią się tym, że pewien wierzchołek v_{U_x} należy jedynie do s', to wartość $T(x)$ należy do $A_{s'} \setminus A_{s''}$, co dowodzi, że $T^{\Delta}(s') \neq T^{\Delta}(s'')$. □

Fakt 5.20. *Niech $s \in K_n$, $s' \in K_{n'}$ mają równe typy. Wówczas istnieje jedyny element $\gamma \in G$ taki, że $s' = \gamma \cdot s$.*

Uwaga 5.21. Teza faktu jest mocniejsza niż wyniki uzyskane w rozdziale 4.1 ze względu na dodatkowe założenie, że funkcja typu T jest mocniejsza niż T^B.

Dowód faktu 5.20. Na mocy faktu 4.6 szukany element γ istnieje; pozostaje sprawdzić jedyność. Niech $s' = \gamma \cdot s = \gamma' \cdot s$; wówczas z faktu 4.5 mamy $s = (\gamma^{-1}\gamma') \cdot s$. Na mocy definicji 4.4 oznacza to, że jeśli v_{U_x} jest wierzchołkiem w s, to określając $x' = \gamma^{-1}\gamma' x$ mamy $T(x') = T(x)$, a ponadto $v_{U_{x'}}$ również jest wierzchołkiem w s. Wówczas powtarzając argumentację (5.8) otrzymujemy, że musi zachodzić $x = x'$, a więc $\gamma = \gamma'$. □

Przeprowadzimy teraz wzmocnienie typu T^{Δ}, stanowiące dość bliską analogię definicji typu T^A dla sympleksów. (Różnice pojawią się w dowodach, a także w definicji 5.24).

Definicja 5.22 (por. definicja 5.2)**.** *Rodzicem priorytetowym* sympleksu $s \in K_n$ dla $n > 0$ nazwiemy minimalny sympleks w K_{n-1} zawierający $f_n(s)$, który oznaczymy symbolem $s^{\uparrow}$. Sympleks s nazwiemy *dzieckiem priorytetowym* sympleksu s', jeśli $s' = s^{\uparrow}$.

Fakt 5.23 (por. fakt 5.3, a także fakt 4.6)**.** *Niech $s \in K_n$, $s' \in K_{n'}$ oraz $\gamma \in G$ będą takie, że $s' = \gamma \cdot s$ (w sensie definicji 4.4). Wówczas przesunięcie o γ zadaje bijekcję między dziećmi priorytetowymi s a dziećmi priorytetowymi s'.*

Dowód. Jest to łatwy wniosek z lematu 4.10 (oraz faktu 4.5). Lemat zapewnia, że przesunięcie o γ przeprowadza sympleksy zawarte w $f_n^{-1}(s)$ na sympleksy zawarte w $f_{n'}^{-1}(s')$. Co wiecej, jeśli $\sigma \subseteq s$ oraz $\gamma \cdot \sigma$ nie jest dzieckiem priorytetowym s', to mamy $\gamma \cdot \sigma \subseteq f_{n'}^{-1}(s'')$ dla pewnego $s'' \subsetneq s'$ i wówczas $\sigma \subseteq f_n^{-1}(\gamma^{-1} \cdot s'')$, co oznacza, że σ nie jest dzieckiem priorytetowym s. Rozumowania w przeciwną stronę przebiegają analogicznie, ponieważ $s = \gamma^{-1} \cdot s'$. □

Niech $\mathcal{T}$ oznacza zbiór wartości typu T^Δ. Dla każdego $\tau \in \mathcal{T}$ wybierzmy pewnego *reprezentanta* tego typu $s_\tau \in K_{n_\tau}$. Dla dowolnego sympleksu $s \in K_n$ typu τ niech $\gamma_\tau \in G$ będzie (jedynym na mocy faktu 5.20) elementem takim, że $\gamma_s \cdot s = s_\tau$.

Definicja 5.24 (por. definicje 5.6 i 5.7)**.** Definiujemy typ $T^{\Delta+A}$ sympleksu $s \in K_n$ wzorem

$$T^{\Delta+A}(s) = \big(T^\Delta(s),\ T^\Delta(s^\uparrow),\ \gamma_{s^\uparrow} \cdot s\big). \tag{5.9}$$

Zauważmy, że na mocy lematu 4.10 przesunięcie $\gamma_{s^\uparrow} \cdot s$ (pełniące rolę analogiczną do numeru potomnego) istnieje i jest jednym z sympleksów w przeciwobrazie $f_{n_\tau}^{-1}(s_\tau)$, gdzie $\tau = T^\Delta(s^\uparrow)$. Zapewnia to poprawność powyższej definicji i zarazem skończoność typu $T^{\Delta+A}$.

Zauważmy również, że składnik $T^\Delta(s^\uparrow)$ we wzorze (5.9) nie ma odpowiednika w definicji 5.7. Wykorzystamy go w dowodzie faktu 5.26.

Fakt 5.25. *System odwrotny (K_n, f_n) wraz z funkcją typu sympleksu $T^{\Delta+A}$ spełnia warunki z definicji 1.9.*

Dowód. Ponieważ system (K_n) ma własność Markowa z funkcją typu T^Δ, słabszą niż $T^{\Delta+A}$, wystarczy sprawdzić warunek (iii). Z kolei w tym celu — na mocy lematu 4.10 — wystarczy upewnić się, że jeśli dla pewnych $s \in K_n$, $s' \in K_{n'}$, $\gamma \in G$ zachodzi $s' = \gamma \cdot s$, a przy tym s, s' mają zgodny typ $T^{\Delta+A}$, to przesunięcie o γ zachowuje wartości typu $T^{\Delta+A}$ dla wszystkich sympleksów zawartych w $f_n^{-1}(s)$.

Niech więc σ będzie pewnym takim sympleksem. Wówczas $\sigma^\uparrow \subseteq s$, zatem z tezy lematu 4.10 (a konkretnie stąd, że przesunięcie o γ zachowuje typ T^Δ, a także że jest przemienne z f_n i $f_{n'}$) mamy:

$$T^\Delta\big((\gamma \cdot \sigma)^\uparrow\big) = T^\Delta\big(\gamma \cdot (\sigma^\uparrow)\big) = T^\Delta(\sigma^\uparrow). \tag{5.10}$$

Ponadto oczywiście zachodzi $T^\Delta(\sigma) = T^\Delta(\gamma \cdot \sigma)$, zatem do sprawdzenia pozostaje jedynie równość ostatnich współrzędnych w typach $T^{\Delta+A}(\sigma)$, $T^{\Delta+A}(\gamma \cdot \sigma)$.

Oznaczmy przez τ wyrażenie (5.10). Wówczas, korzystając z faktu 4.5, mamy

$$\gamma_{\sigma^\uparrow} \cdot \sigma^\uparrow = s_\tau = \gamma_{(\gamma\cdot\sigma)^\uparrow} \cdot (\gamma \cdot \sigma)^\uparrow = \gamma_{(\gamma\cdot\sigma)^\uparrow} \cdot \big(\gamma \cdot (\sigma)^\uparrow\big) = \big(\gamma_{(\gamma\cdot\sigma)^\uparrow}\, \gamma\big) \cdot \sigma^\uparrow,$$

a więc na mocy faktu 5.20 zachodzi $\gamma_{\sigma^\uparrow} = \gamma_{(\gamma\cdot\sigma)^\uparrow}\, \gamma$. Stąd z kolei otrzymujemy:

$$\gamma_{\sigma^\uparrow} \cdot \sigma = \big(\gamma_{(\gamma\cdot\sigma)^\uparrow}\, \gamma\big) \cdot \sigma = \gamma_{(\gamma\cdot\sigma)^\uparrow} \cdot (\gamma \cdot \sigma),$$

co kończy dowód. □

Fakt 5.26. *Dla dowolnego sympleksu $s \in K_n$ wszystkie sympleksy w przeciwobrazie $f_n^{-1}(s)$ mają parami różne typy $T^{\Delta+A}$.*

Dowód. Niech $\sigma, \sigma' \in f_n^{-1}(s)$ spełniają $T^{\Delta+A}$. Wówczas w szczególności $T^\Delta(\sigma^\uparrow) = T^\Delta(\sigma'^\uparrow)$, a ponieważ $\sigma^\uparrow$, $\sigma'^\uparrow$ są podsympleksami s, z faktu 5.19 wynika, że są one równe. Wobec tego z równości trzecich współrzędnych w typach $T^{\Delta+A}(\sigma)$, $T^{\Delta+A}(\sigma')$ wynika natychmiast równość $\sigma = \sigma'$. □

Rozdział 6

∂G jako przestrzeń semi-markowowska

Rozdział ten poświęcony jest wykazaniu, że brzeg ∂G grupy hiperbolicznej G ma strukturę *przestrzeni semi-markowowskiej* (patrz definicja 6.5). W rozdziale 6.1 wprowadzamy pojęcia niezbędne do sformułowania głównego wyniku, którym jest twierdzenie 6.6 podane na jego końcu. Pozostała część rozdziału służy udowodnieniu tego twierdzenia.

6.1 Zbiory i przestrzenie semi-markowowskie

Niech Σ będzie skończonym alfabetem, zaś $\Sigma^{\mathbb{N}}$ oznacza zbiór nieskończonych słów nad Σ.

W zbiorze Σ określamy operacje przesunięcia $S : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \Sigma^{\mathbb{N}}$ oraz rzutowania $\pi_F : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \Sigma^F$ (gdzie $F \subseteq \mathbb{N}$) wzorami:

$$S\big((a_0, a_1, \ldots)\big) = (a_1, a_2, \ldots), \qquad \pi_F\big((a_0, a_1, \ldots)\big) = (a_n)_{n \in F}.$$

Definicja 6.1 ([3, rozdz. 2.3])**.** Podzbiór $C \subseteq \Sigma^{\mathbb{N}}$ nazywamy *cylindrem*, jeśli $C = \pi_F^{-1}(A)$ dla pewnego skończonego $F \subseteq \mathbb{N}$ oraz pewnego $A \subseteq \Sigma^F$.

(Intuicyjnie: zbiór C można opisać warunkami wiążącymi skończoną liczbę ustalonych pozycji w ciągu $(a_n)_{n \geq 0} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$).

Definicja 6.2 ([3, def. 6.1.1])**.** Podzbiór $M \subseteq \Sigma^{\mathbb{N}}$ nazywamy *zbiorem semi-markowowskim*, jeśli istnieją cylindry C_1, C_2 w $\Sigma^{\mathbb{N}}$ takie, że $M = C_1 \cap \bigcap_{n \geq 0}^{\infty} S^{-n}(C_2)$.

Uwaga 6.3. W szczególności dla dowolnego podzbioru $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ oraz relacji dwuargumentowej $\to$ w zbiorze Σ następujący zbiór jest semi-markowowski:

$$M(\Sigma_0, \to) = \big\{(a_n)_{n \geq 0} \,\big|\, a_0 \in \Sigma_0,\, a_n \to a_{n+1} \text{ dla } n \geq 0\big\}.$$

Na przestrzeni słów $\Sigma^{\mathbb{N}}$ rozpatrujemy naturalną topologię produktową Cantora (generowaną przez bazę cylindrów). W tej topologii zbiory semi-markowowskie są podzbiorami domkniętymi $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

Na użytek kolejnej definicji zdefiniujmy naturalne utożsamienie par słów ze słowami par:

$$J : \quad \Sigma^{\mathbb{N}} \times \Sigma^{\mathbb{N}} \quad \ni \quad \Big(\big((a_n)_{n \geq 0},\, (b_n)_{n \geq 0}\big)\Big) \quad \mapsto \quad \big((a_n,\, b_n)\big)_{n \geq 0} \quad \in \quad (\Sigma \times \Sigma)^{\mathbb{N}}.$$

Definicja 6.4. Relację dwuargumentową $R \subseteq \Sigma^{\mathbb{N}} \times \Sigma^{\mathbb{N}}$ nazwiemy *relacją semi-markowowską*, jeśli jej obraz przy powyższym utożsamieniu $J(R) \subseteq (\Sigma \times \Sigma)^{\mathbb{N}}$ jest zbiorem semi-markowowskim (nad alfabetem $\Sigma \times \Sigma$).

Definicja 6.5 ([3, def. 6.1.5]). Przestrzeń topologiczną Hausdorffa Ω nazywamy *przestrzenią semi-markowowską*, jeśli jest topologicznym ilorazem zbioru semi-markowowskiego z topologią produktową Cantora przez semi-markowowską relację równoważności.

Naszym celem będzie udowodnienie następującego wyniku:

Twierdzenie 6.6. *Brzeg dowolnej grupy hiperbolicznej G jest przestrzenią semi-markowowską.*

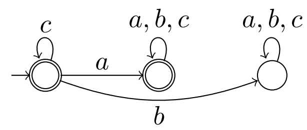
Dowód twierdzenia 6.6 zajmie nam pozostałą część tego rozdziału; ostatecznie powstanie on z zastosowania wniosku 6.16 do przyporządkowania *C-typu*, które określimy w rozdziale 6.4.

Uwaga 6.7. Twierdzenie to zostało udowodnione (w [3]) jednak jedynie w przypadku, gdy grupa G jest beztorsyjna. Podany poniżej dowód uwalnia się od tego założenia, choć ceną jest istotne zwiększenie stopnia komplikacji rozumowania. Odnotujmy zarazem, że w przypadku beztorsyjnym obszerne fragmenty dowodu stają się trywialne lub pomijalne — zaś podstawowy "szkielet" rozumowania otrzymany po ich wykreśleniu (podsumowany w fakcie 6.15) jest analogiczny do dowodu z [3]. Za kluczowy moment dowodu można uznać lemat 5.17 — jest on analogiczny do lematu 7.3.1 w [3], który w szczególny sposób wymagał założenia beztorsyjności G. Wyniki oraz pewne problemy związane z [3] dokładniej omówione zostaną w uwadze 6.17.

Uwaga 6.8. Warto w tym momencie porównać twierdzenie 6.6 ze znanym twierdzeniem stwierdzającym automatyczność grup hiperbolicznych, opisanym m. in. w [2, tw. 12.7.1]. Związek między tymi twierdzeniami wyda się jeszcze bliższy, gdy zauważymy, że — chociaż klasyczne twierdzenie o automatyczności dotyczy opisu grafu Cayleya grupy — łatwo wywnioskować z niego analogiczny opis brzegu Gromova. Jest on mianowicie ilorazem "regularnego" zbioru słów nieskończonych przez "regularną" relację równoważności (w sensie analogicznym do definicji 6.4), gdzie "regularność" zbioru $\Phi \subseteq \Sigma^{\mathbb{N}}$ oznacza istnienie automatu skończonego A takiego, że słowo $(a_n)_{n\geq 0}$ należy do Φ wtedy i tylko wtedy, gdy A akceptuje każdy jego skończony prefiks $(a_n)_{n=0}^{N}$.

Taki warunek regularności jest jednak słabszy od warunku z definicji 6.2, o czym świadczy przykład:

$$\Phi = \big\{(x_n)_{n\geq 0} \in \{a,b,c\}^{\mathbb{N}} \;\big|\; \forall_n \; (x_n = b \;\Rightarrow\; \exists_{i<n} \; x_i = a)\big\}, \qquad A :$$



Łatwo sprawdzić, że zbiór Φ odpowiada automatowi A w opisanym powyżej sensie, jednak nie jest semi-markowowski. Można to uzasadnić następująco. Załóżmy, że istnieje przedstawienie $\Phi = C_1 \cap \bigcap_{n\geq 0} S^{-n}(C_2)$ zgodne z definicją 6.2, przy czym cylinder C_1 ma postać $\pi_F^{-1}(A)$ zgodnie z definicją 6.1, i oznaczmy przez N największy element zbioru F. Wówczas słowo $\alpha_1 = \underbrace{cc\ldots cc}_{N+1}\underbrace{aa\ldots aa}_{N+1}\underbrace{cc\ldots cc}_{N+1}bb\ldots$ należy do Φ, podczas gdy $\alpha_2 = \underbrace{cc\ldots cc}_{N+1}bb\ldots$ nie należy do Φ. Jednak słowa te mają wspólny prefiks długości $N+1$ (więc α_2 nie może być odrzucone przez C_1), a ponadto α_2 jest sufiksem α_1 (więc nie może być odrzucone przez C_2).

6.2 Nici potomków priorytetowych

W dalszej części rozdziału 6 obowiązują założenia sformułowane we wstępie do rozdziału 5.

Oznaczenie 6.9. *Dla dowolnego $n \geq 0$ oznaczmy*

$$G_n = \big\{x \in G \,\big|\, |x| = n\big\}.$$

Definicja 6.10. Niech $x, y \in G$. Powiemy, że x jest *p-wnukiem* (odp. *p-dziadkiem*) y, jeśli jest p-potomkiem (odp. p-przodkiem) y oraz $\big||x| - |y|\big| = L$. Dla uproszczenia zapisu przyjmiemy oznaczenie $x^{\Uparrow} = x^{\uparrow L}$ (dla $|x| \geq L$) oraz analogicznie $x^{\Uparrow k} = x^{\uparrow Lk}$ (dla $|x| \geq Lk$).

Definicja 6.11. Dwa elementy $x, y \in G$ nazwiemy *sąsiadami* (ozn. $x \leftrightarrow y$), jeśli $|x| = |y|$ oraz $d(x, y) \leq 8\delta$.

Definicja 6.12. *Nicią* nazwiemy nieskończony ciąg $(g_n)_{n\geq 0}$ taką, że dla każdego $n \geq 0$ zachodzi $g_n \in G_{Ln}$ oraz $g_n = g_{n+1}^{\Uparrow}$. Zbiór wszystkich nici w G oznaczymy przez $\mathcal{N}$.

Zauważmy, że dowolnej nici $(g_n)_{n\geq 0}$ możemy w naturalny sposób przyporządkować geodezyjną α w G, określoną wzorem

$$\alpha(m) = g_n^{\uparrow Ln-m} \qquad \text{dla} \quad m, n \geq 0,\ Ln \geq m.$$

(Łatwo sprawdzić, że wartość $g_n^{\uparrow Ln-m}$ nie zależy od wyboru n). Oznacza to, że ma sens pojęcie *granicy nici*: ciąg (g_n) musi być w przestrzeni $G \cup \partial G$ zbieżny do elementu $\lim_{m\to\infty} \alpha(m) = [\alpha] \in \partial G$.

Fakt 6.13. *Niech przekształcenie $I : \mathcal{N} \to \partial G$ przyporządkowuje nici $(g_n)_{n\geq 0}$ jej granicę w ∂G. Wówczas:*

(a) *I jest surjekcją;*

(b) *dla dowolnych $(g_n), (h_n) \in \mathcal{N}$ zachodzi równoważność*

$$I\big((g_n)\big) = I\big((h_n)\big) \qquad \iff \qquad g_n \leftrightarrow h_n \quad \text{dla każdego } n \geq 0.$$

Dowód. **(a)** Niech $x \in \partial G$ i niech α będzie dowolną nieskończoną geodezyjną prowadzącą z e ku x. Dla $k \geq 0$ określamy geodezyjną α_k w G wzorem

$$\alpha_k(n) = \begin{cases} \alpha(k)^{\uparrow k-n} & \text{dla } n \leq k, \\ \alpha(n) & \text{dla } n \geq k. \end{cases}$$

(Dla $n = k$ obie gałęzie zwracają ten sam wynik). Wówczas dla dowolnego $n \geq 0$ mamy $|\alpha_k(n)| = n$, a ponadto $d\big(\alpha_k(n), \alpha_k(n+1)\big) = 1$, co dowodzi, że α_k jest geodezyjną. Co więcej, mamy $\alpha_k(0) = e$ oraz $\lim_{n\to\infty} \alpha_k(n) = x$, ponieważ α_k od pewnego miejsca pokrywa się z α.

Stosując do ciągu (α_k) fakt 2.3, otrzymujemy pewien podciąg (α_{k_i}) oraz geodezyjną α_∞ takie, że α_∞ pokrywa się z α_{k_i} na odcinku $[0, i]$. Wybierając w razie potrzeby podciąg, możemy założyć, że $k_i \geq i$; wówczas otrzymamy, że $\alpha_\infty(i-1) = \alpha_\infty(i)^{\uparrow}$ dla każdego $i \geq 1$, zatem ciąg $\big(\alpha_\infty(Ln)\big)_{n\geq 0}$ jest nicią w G. Z drugiej strony, fakt 2.3 zapewnia też, że $I\big((g_n)\big) = [\alpha_\infty] = \lim_{i\to\infty}[\alpha_{k_i}] = x$, co dowodzi tezy.

(b) Implikacja $(\Rightarrow)$ wynika bezpośrednio z nierówności (1.3.4.1) w [3]. Jeśli zaś mamy $g_n \leftrightarrow h_n$ dla każdego $n \geq 0$, a przy tym α, β są odpowiednio geodezyjnymi wyznaczonymi przez nici (g_n) i (h_n), to zachodzi

$$d\big(\alpha(Ln), \beta(Ln)\big) = d(g_n, h_n) \leq 8\delta \qquad \text{dla} \quad n \geq 0,$$

zatem z nierówności trójkąta wynika, że $d\big(\alpha(m), \beta(m)\big) \leq 2L + 8\delta$ dla każdego $m \geq 0$, a stąd wynika, że w ∂G mamy $[\alpha] = [\beta]$. □

6.3 Pożądane własności typów

Przedstawienie ∂G jako przestrzeni semi-markowowskiej oprzemy na odpowiedniej funkcji typu (patrz wstęp do rozdziału 5). Ponieważ wykorzystywany w poprzednich rozdziałach typ kulowy T_N^b ma zbyt słabe własności dla naszych bieżących potrzeb, naszym celem jest odpowiednie jego wzmocnienie. W poniższym podrozdziale wskazujemy (w fakcie 6.15) własności funkcji typu, które wystarczają do zadania przy jej pomocy struktury semi-markowowskiej na ∂G (co wykażemy we wniosku 6.16). Konstrukcję typu T^C spełniającego te warunki podamy zaś w rozdziale 6.4.

Definicja 6.14. Niech T będzie dowolną funkcją przypisującą elementom G typy ze skończonego zbioru $\mathcal{T}$. Dla nici $\nu = (g_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{N}$ jej *typem* $T^*(\nu)$ nazwiemy ciąg $\big(T(g_n)\big)_{n\geq 0}$.

Wówczas z definicji przestrzeni semi-markowowskiej łatwo wynika następujący fakt.

Fakt 6.15. *Niech T będzie funkcją typu w G o wartościach w $\mathcal{T}$. Wówczas:*

(a) *Jeśli p-wnuki dowolnego elementu mają parami różne typy, to funkcja $T^* : \mathcal{N} \to \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ jest różnowartościowa;*

(b) *Jeśli zbiór typów p-wnuków g zależy wyłącznie od typu g, to obraz funkcji T^* jest zbiorem semi-markowowskim nad $\mathcal{T}$;*

(c) *Przy założeniach punktów **(a)** i **(b)**, jeśli dla dowolnych $g, g' \in G_{L(n+1)}$, $h, h' \in G_{L(m+1)}$ z warunków*

$$T(g) = T(h), \qquad T(g') = T(h'), \qquad T(g^{\Uparrow}) = T(h^{\Uparrow}), \qquad T(g'^{\Uparrow}) = T(h'^{\Uparrow}),$$
$$g^{\Uparrow} \leftrightarrow g'^{\Uparrow}, \qquad g \leftrightarrow g', \qquad h^{\Uparrow} \leftrightarrow h'^{\Uparrow},$$

wynika warunek $h \leftrightarrow h'$, to relacja równoważności $\sim$ w zbiorze $T^*(\mathcal{N})$, zadana wzorem $T^*(\nu) \sim T^*(\nu') \iff I(\nu) = I(\nu')$, jest relacją semi-markowowską.

Dowód. Punkt **(a)** jest oczywisty. Jeśli spełnione jest założenie punktu **(b)**, to łatwo sprawdzić, że $T^*(\mathcal{N}) = M(\Sigma_0, \to)$, gdzie $\Sigma_0 = \{T(e)\}$, zaś $\tau \to \tau'$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych $n \geq 0$ oraz $g \in G_{L(n+1)}$ zachodzi $\tau = T(g^{\Uparrow})$ oraz $\tau' = T(g)$.

Analogicznie łatwo sprawdzić, że przy założeniach punktu **(c)** relacja $\sim$ ma postać $M(A_0, \rightsquigarrow)$, gdzie

$$A_0 = \big\{\big(T(e), T(e)\big)\big\},$$
$$\big(T(g^{\Uparrow}), T(g'^{\Uparrow})\big) \rightsquigarrow \big(T(g), T(g')\big) \qquad \text{dla} \quad g, g' \in G_{L(n+1)},\ g^{\Uparrow} \leftrightarrow g'^{\Uparrow},\ g \leftrightarrow g',\ n \geq 0.$$

Istotnie: zawieranie $\sim$ w $M(A_0, \rightsquigarrow)$ wynika natychmiast z faktu 6.13b. W drugą stronę, jeśli ciąg $\big((\tau_n, \tau'_n)\big)_{n\geq 0}$ należy do $M(A_0, \rightsquigarrow)$, to wynika stąd, że ciągi $(\tau_n)_{n\geq 0}$ oraz $(\tau'_n)_{n\geq 0}$ należą do zbioru $M(\Sigma_0, \to)$ określonego w poprzednim akapicie, zatem są typami pewnych nici $(h_n)_{n\geq 0}$ i odpowiednio $(h'_n)_{n\geq 0}$. Ponadto łatwo sprawdzić przez indukcję, że $h_n \leftrightarrow h'_n$ dla każdego $n \geq 0$: dla $n = 0$ wynika to z równości $h_0 = h'_0 = e$, zaś dla $n > 0$ wystarczy skorzystać z relacji $h_{n-1} \leftrightarrow h'_{n-1}$, warunku $(\tau_{n-1}, \tau'_{n-1}) \rightsquigarrow (\tau_n, \tau'_n)$ oraz założeń punktu **(c)**. Otrzymujemy więc, że $h_n \leftrightarrow h'_n$ dla $n \geq 0$, a stąd poprzez fakt 6.13b wynika, że $(\tau_n) \sim (\tau'_n)$. $\square$

Wniosek 6.16. *Przy założeniach punktów **(a-c)** z faktu 6.15 zbiór ∂G jest przestrzenią semi-markowowską.*

Dowód. Ponieważ surjektywność odwzorowania $I \circ (T^*)^{-1} : T^*(\mathcal{N}) \to \partial G$ wynika z faktu 6.13a, do wykazania homeomorfizmu wystarczy sprawdzić jego ciągłość. Niech w przestrzeni $T^*(\mathcal{N})$ zachodzi $(\tau_n^{(i)}) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} (\tau_n)$; oznacza to, że istnieje ciąg $n_i \to \infty$ taki, że dla każdego $i \geq 0$ ciągi $(\tau_n^{(i)})$ oraz (τ_n) są zgodne na pierwszych n_i pozycjach. Wówczas z założeń punktu **(a)** wynika, że odpowiadające im nici $(g_n^{(i)})$, (g_n) również są zgodne na pierwszych n_i pozycjach, w szczególności $g_{n_i}^{(i)} = g_{n_i}$. Wówczas również geodezyjne $\alpha^{(i)}$ odpowiadające ciągom $(g_n^{(i)})$ są coraz bardziej zgodne z geodezyjną α odpowiadającą ciągowi (g_n), co z definicji ∂G oznacza, że $I\big((g_n^{(i)})\big) = [\alpha^{(i)}] \to [\alpha] = I\big((g_n)\big)$ w ∂G. □

Uwaga 6.17. Przedstawiony w fakcie 6.15 główny "szkielet" dowodu twierdzenia 6.6 zaczerpnięty jest z [3]. Jako funkcja typu został tam wybrany typ kulowy T_N^b (określony w rozdziale 2.3), zaś jako L — wartość 1. Jednak w przypadku grupy zawierającej torsje tak określony typ nie musi spełniać warunku **(a)** w treści faktu 6.15. Co więcej, nawet w przypadku beztorsyjnym uzasadnienie warunku **(b)** — podane w [3] na stronie 125 (rozdział 7, dowód Proposition 2.4) — zawiera istotną usterkę w linii 13.

6.4 Typy rozszerzone i typ T^C

Definicja 6.18. Niech T będzie dowolną funkcją typu w G o wartościach w skończonym zbiorze $\mathcal{T}$ i niech $r \geq 0$. Niech $g \in G$, i niech $P_r(g)$ oznacza zbiór r-towarzyszy g (patrz definicja 3.11). Definiujemy *typ rozszerzony* elementu g jako funkcję $T^{+r}(g) : P_r(g) \to \mathcal{T}$, określoną wzorem

$$\big(T^{+r}(g)\big)(h) = T(gh) \qquad \text{dla} \quad h \in P_r(g).$$

Ponieważ $P_r(g)$ zawiera się w ograniczonej kuli $B(e, r)$, funkcja typu rozszerzonego T^{+r} jest w oczywisty sposób skończenie wartościowa.

Definicja 6.19. *C-typem* elementu $g \in G$ nazywamy jego B-typ rozszerzony o 8δ:

$$T^C(g) = (T^B)^{+8\delta}(g) \qquad \text{dla } g \in G.$$

Zauważmy, że z porównania definicji 3.11 i 6.11 wynika, że zbiór $P_{8\delta}(g)$ składa się dokładnie z tych $h \in G$, dla których $g \leftrightarrow gh$. Oznacza to, że C-typ elementu g składa się z B-typu g oraz B-typów jego sąsiadów (wraz z informacją o ich wzajemnym położeniu).

Fakt 6.20. *Dla dowolnego $g \in G$ p-wnuki elementu g mają parami różne C-typy.*

Dowód. Z definicji C-typ elementu $h \in G$ zawiera w sobie jego B-typ, który zawiera z kolei jego A-typ, a ten — numer potomny n_h, który z definicji jest cechą rozróżniającą p-wnuki ustalonego elementu $g \in G$. □

Lemat 6.21. *Zbiór C-typów p-wnuków elementu $g \in G$ zależy wyłącznie od $T^C(g)$.*

Dowód. Niech $g_1, h_1 \in G$ spełniają $T^C(g_1) = T^C(h_1)$; oznaczmy $\gamma = h_1 g_1^{-1}$. Z faktu 5.9 wynika, że lewostronne przesunięcie o γ zadaje bijekcję między p-wnukami g_1 a p-wnukami h_1. Niech więc g_2 będzie p-wnukiem g_1 oraz $h_2 = \gamma g_2$; naszym celem jest wykazanie, że $T^C(g_2) = T^C(h_2)$. W tym celu wybierzmy dowolne $g_2' \in G$ takie, że $g_2 \leftrightarrow g_2'$; należy wykazać, że $T^B(g_2') = T^B(h_2')$, gdzie $h_2' = \gamma g_2'$.

Oznaczmy $g_1' = g_2'^{\Uparrow}$ oraz $h_1' = \gamma g_1'$. Ponieważ $g_2 \leftrightarrow g_2'$, z faktu 5.11 mamy $g_1 \leftrightarrow g_1'$; wówczas z równości $T^C(g_1) = T^C(h_1)$ wynika, że $T^B(g_1') = T^B(h_1')$. W tej sytuacji lemat 5.16 zapewnia, że $T^B(g_2') = T^B(h_2')$, co należało sprawdzić. □

Lemat 6.22. *Typ T^C spełnia warunek opisany w punkcie* **(c)** *faktu 6.15.*

Dowód. Niech g, g', h, h' będą takie, jak w treści faktu 6.15. W szczególności zakładamy, że $T^C(g^{\Uparrow}) = T^C(h^{\Uparrow})$. Z definicji C-typu oznacza to, że lewe przesunięcie o element $\gamma = h^{-1}g$ przeprowadza sąsiadów g na sąsiadów h z zachowaniem B-typu, a stąd z kolei na mocy lematu 5.16 wynika, że przesunięcie to zachowuje dzieci tych sąsiadów wraz z ich B-typami. W szczególności:

- element $g'^{\Uparrow}$ musi zostać przeprowadzony na $h'^{\Uparrow}$, ponieważ z założeń wynika, że $T^B(g'^{\Uparrow}) = T^B(h'^{\Uparrow})$, a przy tym $h'^{\Uparrow}$ jest jedynym sąsiadem $h^{\Uparrow}$ z odpowiednim B-typem (na mocy lematu 5.17);
- elementy g, g' muszą zostać przeprowadzone na h, h', ponieważ z założeń odpowiednie B-typy są zgodne, a przy tym h, h' są jedynymi p-wnukami $h^{\Uparrow}$, $h'^{\Uparrow}$ z odpowiednimi B-typami (ponieważ B-typ na mocy uwagi 5.13 zawiera w sobie A-typ, który musi być różny dla różnych p-wnuków danego elementu).

Wobec tego mamy $d(h, h') = d(\gamma g, \gamma g') = d(g, g') \leq 8\delta$, co należało wykazać. □

Dowód twierdzenia 6.6. Na mocy wniosku 6.16 wystarczy zapewnić, że typ T^C (którego skończoność wynika z faktu 5.15 i definicji 6.19) spełnia warunki **(a-c)** z treści faktu 6.15. Warunki **(b)** i **(c)** wynikają odpowiednio z lematów 6.21 i 6.22, natomiast warunek **(a)** wynika stąd, że z definicji dla każdego $x \in G$ wartość $T^C(x)$ wyznacza $T^B(x)$ i dalej $T^A(x)$, zaś A-typy p-wnuków danego elementu są z definicji parami różne. Tym samym dowód twierdzenia został zakończony. □

Rozdział 7

Ograniczenie wymiaru w kompakcie Markowa

W niniejszym rozdziale zakładamy, że $\dim \partial G \leq k < \infty$, i dążymy do poprawienia konstrukcji kompaktu Markowa tak, by wszystkie występujące w nim wielościany również miały wymiar $\leq k$. Zauważmy, że skoro ∂G jest zwartą przestrzenią metryczną, wymiar pokryciowy jej podzbiorów jest zgodny z ich małym wymiarym indukcyjnym (por. [6, tw. 1.7.7]). Ponieważ w tym rozdziale będziemy często stosować operator brzegu topologicznego ∂, dla uniknięcia kolizji oznaczeń brzeg Gromova ∂G grupy G oznaczymy przez X.

Poniżej podajemy główny wynik niniejszego rozdziału. Zauważmy od razu, że wynika z niego (poprzez twierdzenie 4.1) istnienie przedstawienia ∂G jako kompaktu Markowa, w którym wymiary wszystkich sympleksów nie przekraczają k.

Lemat 7.1. *Niech $k \geq 0$ i niech G będzie grupą hiperboliczną taką, że $\dim \partial G \leq k$. Wówczas istnieje quasi-G-niezmienniczy system pokryć przestrzeni ∂G rzędu $\leq k+1$.*

Jako natychmiastowy wniosek z lematu dostajemy twierdzenie:

Twierdzenie 7.2. *Niech $k \geq 0$ i niech G będzie grupą hiperboliczną taką, że $\dim \partial G \leq k$. Wówczas istnieje barycentryczny kompakt Markowa z własnością rozdrabniania realizowany przez system odwrotny, w którym wymiary sympleksów są nie większe niż k.*

Uwaga 7.3. Podany dowód lematu 7.1 będzie wymagał sprawdzenia wielu szczegółowych i technicznych własności; warto jednak zauważyć, że jego szkic nie jest bardzo skomplikowany i przypomina plan wykazania nietrudnego twierdzenia z teorii wymiaru mówiącego, że w każde pokrycie otwarte $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^n$ zwartej przestrzeni metrycznej X wymiaru k można wpisać pokrycie otwarte rzędu $\leq k+1$. Dowód tego faktu może przebiegać następująco:

- Rozumujemy indukcyjnie względem k. Dla wygody będziemy w ramach indukcji wykazywać nieco mocniejszą tezę: w pokrycie $\{U_i\}$ można wpisać pokrycie otwarte $\{V_j\}$ takie, że domknięcia $\overline{V_j}$ tworzą rodzinę rzędu $\leq k+1$.

  (Dokładny schemat indukcji w naszej sytuacji formułujemy w lemacie 7.19).

- Korzystając z podanego poniżej twierdzenia 7.4, wybieramy w każdym zbiorze z pokrycia $U_i \in \mathcal{U}$ podzbiór otwarty U_i', którego brzeg jest wymiaru $k-1$, tak by zbiory U_i' nadal tworzyły pokrycie X.

  (Podobnie zdefiniujemy zbiory D_x w dowodzie lematu 7.16).

- Definiujemy zbiory U_i'' za pomocą warunku

$$x \in U_i'' \qquad \iff \qquad x \in U_i' \quad \text{oraz} \quad x \notin U_j' \quad \text{dla } j < i.$$

(Analogicznie zdefiniujemy zbiory E_x w dowodzie lematu 7.16)

- Przestrzeń X jest pokryta przez wnętrza zbiorów U_i'' (które są parami rozłączne) oraz zbiór $\widetilde{X} = \bigcup_i \partial U_i''$, o którym łatwo sprawdzić, że jest domkniętym podzbiorem X wymiaru $\leq k-1$. W przestrzeni $\widetilde{X}$ mamy z kolei otwarte pokrycie zbiorami $\widetilde{U}_i = U_i \cap \widetilde{X}$. Z założenia indukcyjnego wynika, że w pokrycie to można wpisać pewne pokrycie zbiorami $\widetilde{V}_j$ $(1 \leq j \leq m)$, których domknięcia tworzą rodzinę rzędu $\leq k$. Przy tym zbiory V_j są otwarte w $\widetilde{X}$, ale niekoniecznie w X.

(Zbiorom $\partial U_i''$, $\operatorname{int} U_i''$ odpowiadają zbiory F_x, G_x w treści lematu 7.16).

- Niech $\varepsilon > 0$ będzie najmniejszą z odległości pomiędzy dowolną *parą rozłącznych* domknięć $\overline{\widetilde{V}_{j_1}}$, $\overline{\widetilde{V}_{j_2}}$. Dla $1 \leq j \leq m$ definiujemy zbiór V_j jako $\frac{\varepsilon}{4}$-otoczenie (w X) zbioru $\widetilde{V}_j$. Wówczas łatwo sprawdzić, że zbiory V_j są otwarte w X oraz pokrywają $\widetilde{X}$, a przy tym rząd rodziny $\{V_j\}$ nie przekracza rzędu rodziny $\{\widetilde{V}_j\}$, zatem jest $\leq k$. W tej sytuacji rodzina

$$\mathcal{V} = \{V_j\}_{j=1}^m \cup \{\operatorname{int} U_i''\}_{i=1}^n$$

stanowi otwarte pokrycie X, a przy jej rząd nie przekracza sumy rzędów podrodzin $\{U_i''\}$ oraz $\{V_j\}$, czyli jest $\leq k+1$.

(W naszym rozumowaniu skonstruowaniu odpowiednich otoczeń służy lemat 7.17, zaś pozostałe operacje mają swoje odpowiedniki w dowodzie lematu 7.19).

Trudność lematu 7.1 w porównaniu z wynikiem przytoczonym powyżej polega na konieczności zapewnienia quasi-G-niezmienniczości otrzymanych pokryć, tak, aby zachować własność Markowa dla systemu ich nerwów (na mocy twierdzenia 4.1). W tym celu zamiast niezwiązanych ze sobą zbiorów U_i' stworzymy ich wzorce dla wybranych zbiorów U_x różnych typów (ściślej: dla różnych typów elementów x) i przeniesiemy je za pomocą przesunięć określonych (przy założeniu równości typów) w lemacie 2.15. Krok indukcyjny wymaga pewnej skrupulatności, ale sama idea będzie niezmieniona.

Naszym kluczowym narzędziem z zakresu teorii wymiaru będzie poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 7.4 ([6, tw. 1.5.12])**.** *Niech Y będzie ośrodkową przestrzenią metryczną z własnością wymiaru k i niech A, B będą rozłącznymi domkniętymi podzbiorami Y. Wówczas istnieją podzbiory otwarte $\widetilde{A}, \widetilde{B} \subseteq Y$ takie, że*

$$A \subseteq \widetilde{A}, \qquad B \subseteq \widetilde{B}, \qquad \widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \emptyset \qquad \textit{oraz} \qquad \dim\big(Y \setminus (\widetilde{A} \cup \widetilde{B})\big) \leq k-1.$$

7.1 Słabe podsystemy podzbiorów

Oznaczenie 7.5. *Dla dwóch rodzin $\mathcal{C} = \{C_x\}_{x\in G}$, $\mathcal{D} = \{D_x\}_{x\in G}$ oznaczamy:*

$$\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D} = \{C_x \cup D_x\}_{x\in G}.$$

Definicja 7.6. System $\mathcal{C} = \{C_x\}_{x\in G}$ podzbiorów X nazywamy:

- *wymiaru* $\leq k$, jeśli $|\mathcal{C}|_n$ jest wymiaru $\leq k$ dla $n \geq 0$;

- *rzędu* $\leq k$, jeśli dla każdego $n \geq 0$ rodzina $\mathcal{C}_n$ jest rzędu $\leq k$ (tzn. jeśli przecięcie $k+1$ parami różnych elementów $\mathcal{C}_n$ musi być puste); w szczególności *rozłącznym*, jeśli jest rzędu ≤ 1.

Fakt 7.7. *Jeśli systemy podzbiorów $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ są odpowiednio rzędu $\leq a$ i $\leq b$, to $\mathcal{C} \sqcup \mathcal{D}$ jest rzędu $\leq a+b$.* $\square$

Definicja 7.8. Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz $A, B \subseteq X$. Zbiór A nazwiemy *oddzielonym* podzbiorem B (oznaczenie: $A \Subset B$), jeśli $\overline{A} \subseteq \operatorname{int} B$.

Definicja 7.9. Niech $\mathcal{C} = \{C_x\}$, $\mathcal{D} = \{D_x\}$ będą systemami quasi-G-niezmienniczymi podzbiorów X. Powiemy, że:

- $\mathcal{C}$ jest *podsystemem (otwartym, domkniętym)* w $\mathcal{D}$, jeśli C_x jest podzbiorem (otwartym, domkniętym) w $|\mathcal{D}|_n$ dla $n \geq 0$ i $C_x \in \mathcal{C}_n$;
(przypomnijmy za 3.7, że oznaczenie $|\mathcal{D}|_n$ oznacza $\bigcup_{C \in \{C_x \,|\, x \in G,\, |x|=n\}} C$)
- $\mathcal{C}$ jest *podsystemem półdomkniętym* w $\mathcal{D}$, jeśli $|\mathcal{C}|_n$ jest podzbiorem domkniętym w $|\mathcal{D}|_n$ dla $n \geq 0$;
- $\mathcal{C}$ *pokrywa* $\mathcal{D}$, jeśli $|\mathcal{C}|_n \supseteq |\mathcal{D}|_n$ dla $n \geq 0$.

System $\mathcal{C}$ nazwiemy *półdomkniętym*, jeśli $|\mathcal{C}|_n$ jest podzbiorem domkniętym w X dla $n \geq 0$.

Definicja 7.10. Dla dowolnego całkowitego $\theta \geq 0$ definiujemy typ T^B_θ w G jako rozszerzenie (w sensie definicji 6.18) typu T^B (określonego w definicji 5.12) z parametrem $r = \theta \cdot 12\delta$:

$$T^B_\theta = (T^B)^{+\theta \cdot 12\delta}$$

Fakt 7.11. *Niech $g, x, y \in G$ i $\theta \geq 0$, $k > 0$ spełniają*

$$y \in xT^c(x), \qquad T^B_\theta(x) = T^B_\theta(gx), \qquad |y| = |x| + kL,$$

gdzie L oznacza stałą z rozdziału 6 (określoną w rozdz. 6.2). Wówczas

$$T^B_{\theta+1}(y) = T^B_{\theta+1}(gy), \qquad |gy| = |gx| + kL.$$

Dowód. Wystarczy wykazać tezę dla $k = 1$; dla większych k wyniknie wtedy łatwo przez indukcję.

Niech $z \in yP_{(\theta+1)\cdot 12\delta}(y)$. Oznaczmy $w = z^{\Uparrow}$ (patrz definicja 6.10). Ponieważ $L \geq 14\delta$, z faktu 2.1 wynika, że

$$d(x, w) \leq \max\big((\theta+1) \cdot 12\delta + 16\delta - 2L,\ 8\delta\big) \leq \theta \cdot 12\delta,$$

zatem $w \in xP_{12\delta}(x)$, a stąd $T^B(w) = T^B(gw)$ oraz $|gx| = |gw|$. W takim razie z lematu 5.16 wynika, że $gw = (gz)^{\Uparrow}$ oraz $T^B(z) = T^B(gz)$. Z pierwszej równości wynika w szczególności, że gz jest potomkiem gw, tzn. że

$$|gz| = |gw| + d(gz, gw) = |gx| + d(z, w) = |gx| + L.$$

W szczególności biorąc $z = y$ otrzymujemy $|gy| = |y| + L$. Powracając do ogólnego z wnioskujemy więc, że $|gz| = |gy|$, zatem $P_{(\theta+1)\cdot 12\delta}(y) \subseteq P_{(\theta+1)\cdot 12\delta}(gy)$; inkluzję przeciwną można sprawdzić analogicznie (zamieniając rolami g i g^{-1}). W tej sytuacji z równości $T^B(z) = T^B(gz)$ dla ogólnego z wynika równość $T^B_{\theta+1}(y) = T^B_{\theta+1}(gy)$. $\square$

Definicja 7.12. Rodzinę zbiorów $\mathcal{C} = \{C_x\}$ nazwiemy *systemem θ-słabym*, jeśli:

- dla każdego $x \in G$ zachodzi $C_x \subseteq S_x$ (gdzie S_x oznacza zbiór zdefiniowany w rozdziale 3.3);

- rodzina $\mathcal{C}$ wraz z funkcją typu T^B_θ spełnia warunek (QI4a) z definicji 3.8.

Zauważmy, że system $\mathcal{S}$, opisany w rozdziale 3.3, jest 0-słaby (a więc również θ-słaby dla dowolnego $\theta \geq 0$). Wynika to stąd, że typ T^B_θ wyznacza jednoznacznie typ T^b_N (na mocy uwagi 5.13 i definicji 5.7), z którym $\mathcal{S}$ tworzy system quasi-G-niezmienniczy na mocy wniosku 3.20.

Fakt 7.13. *Niech $\mathcal{C} = \{C_x\}_{x\in G}$ będzie systemem Θ-słabym dla pewnego $\Theta \geq 0$. Niech $n \geq 0$, $\theta \geq 1$ oraz $x, y \in G$ będą długości n, przy czym $C_x \cap C_y \neq \emptyset$. Wówczas:*

(a) *$T^B_\theta(x) \neq T^B_\theta(y)$;*

(b) *Dla dowolnego $g \in G$ z równości $T^B_\theta(x) = T^B_\theta(gx)$ wynika, że $T^B_{\theta-1}(y) = T^B_{\theta-1}(gy)$ oraz $|gx| = |gy|$.*

Dowód. Skoro $\emptyset \neq C_x \cap C_y \subseteq S_x \cap S_y$, to z faktu 3.17 wynika, że $d(x, y) \leq 12\delta$. Wówczas z lematu 5.17 wynika, że $T^B(x) \neq T^B(y)$, a więc tym bardziej $T^B_\theta(x) \neq T^B_\theta(y)$. Ponadto skoro $|x| = |y|$, to mamy $x^{-1}y \in P_{\theta\cdot 12\delta}(x) = P_{\theta\cdot 12\delta}(gx)$, a stąd $|gx| = |gy|$. Zauważmy, że z nierówności trójkąta mamy

$$P_{(\theta-1)\cdot 12\delta}(y) = \big(y^{-1}x\, P_{\theta\cdot 12\delta}(x)\big) \cap B\big(e, (\theta-1)\cdot 12\delta\big)$$

i analogicznie dla pary gx, gy, co pokazuje, że $P_{(\theta-1)\cdot 12\delta}(y) = P_{(\theta-1)\cdot 12\delta}(gy)$. Ponadto dla dowolnego $z \in yP_{(\theta-1)\cdot 12\delta}(y)$ z powyższej równości wynika, że $x^{-1}z \in P_{\theta\cdot 12\delta}(x) = P_{\theta\cdot 12\delta}(gx)$, a stąd $T^B(z) = T^B(gz)$. Z dowolności z wynika, że $T^B_{\theta-1}(y) = T^B_{\theta-1}(gy)$. □

Lemat 7.14. *Dowolny system θ-słaby pokryć otwartych $\mathcal{C}$ jest quasi-G-niezmienniczy z funkcją typu $T^B_{\theta+1}$.*

Dowód. Niech $\mathcal{C} = \{C_x\}_{x\in G}$. Prawdziwość warunków (QI1), (QI2) dla $\mathcal{C}$ wynika wprost z ich prawdziwości dla $\mathcal{S}$. Łatwo wywnioskować również (QI4b): jeśli mamy

$$T^B_{\theta+1}(x) = T^B_{\theta+1}(gx), \qquad |x| = |y|, \qquad C_x \cap C_y \neq \emptyset,$$

to z faktu 7.13b mamy $|gx| = |gy|$ oraz $T^B_\theta(y) = T^B_\theta(gy)$, skąd poprzez własność (QI4a) dla systemu $\mathcal{C}$ wynika $C_{gy} = g \cdot C_y$.

Sprawdźmy teraz własność (QI4c). Niech L oznacza stałą z faktu 7.11. Załóżmy teraz, że

$$T^B_{\theta+1}(x) = T^B_{\theta+1}(gx), \qquad |y| = |x| + L, \qquad \emptyset \neq C_y \subseteq C_x.$$

Niech α będzie geodezyjną prowadzącą z e do y i niech $z = \alpha(|x|)$. Wówczas z faktu 3.18c mamy $C_y \subseteq S_y \subseteq S_z$; z drugiej strony $C_y \subseteq S_x$, zatem $S_x \cap S_z \neq \emptyset$, więc na mocy faktu 7.13 mamy

$$T^B_\theta(z) = T^B_\theta(gz), \qquad |gx| = |gz|.$$

Ponieważ $y \in zT^c(z)$ oraz $|y| = |x| + L = |z| + L$, korzystając z faktu 7.11 i następnie z (QI4a) dla systemu $\mathcal{C}$ otrzymujemy, że

$$T^B_{\theta+1}(y) = T^B_{\theta+1}(gy), \qquad |gy| = |gz| + L = |gx| + L, \qquad C_{gy} = g \cdot C_y.$$

Na mocy uwagi 3.9 oznacza to, że $\mathcal{C}$ spełnia własność (QI4c) dla stałej skoku L.

Pozostało wykazać (QI3). Niech $\mathcal{T}$ będzie zbiorem wartości typu $T^B_{\theta+1}$. Wybierzmy $N > 0$ takie, że dla dowolnego $\tau \in \mathcal{T}$ istnieje $x \in G$ o długości mniejszej niż N takie, że $T^B_{\theta+1}(x) = \tau$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie najmniejszą spośród stałych Lebesgue'a dla pokryć $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_N$, i niech $J' > N$ będzie dobrane tak, by dla $n \geq J'$ zachodziło $\max_{S \in \mathcal{S}_n} \operatorname{diam} S_n < \varepsilon$. Wykażemy, że system $\mathcal{C}$ wraz ze stałą J' spełnia (QI3). Na mocy uwagi 3.9 wystarczy sprawdzić tę własność w przypadku $k = 1$.

Niech $x \in G$ spełnia $|x| \geq J'$. Z faktu 3.18 wynika, że $S_x \subseteq S_y$ dla pewnego $y \in G$ długości $|x| - J'$. Niech $y' \in G$ będzie elementem takim, że $T^B_{\theta+1}(y') = T^B_{\theta+1}(y)$ oraz $|y'| < N$. Oznaczmy $\gamma = y'y^{-1}$ oraz $x' = \gamma x$; wówczas z (QI4c) mamy

$$S_{x'} = \gamma \cdot S_x, \qquad T^B_{\theta+1}(x') = T^B_{\theta+1}(x), \qquad |x'| \;=\; |y'| + |x| - |y| \;=\; |y'| + J'.$$

Z ostatniej równości wynika, że $\operatorname{diam} S_{x'} < \varepsilon$, a skoro $|y'| < N$, to $S_{x'}$ musi zawierać się w $C_{z'}$ dla pewnego $z' \in G$ takiego, że $|z'| = |y'|$. Oznaczmy $z = \gamma^{-1} z'$. Wówczas z własności (QI4b), a następnie z faktu 7.13b wynika, że

$$S_z = \gamma^{-1} \cdot S_{z'}, \qquad T^B_\theta(z) = T^B_\theta(z'), \qquad |z| = |y| = |x| - J',$$

a stąd, jako że $\mathcal{C}$ jest θ-słaby, otrzymujemy:

$$C_x \subseteq S_x = \gamma^{-1} \cdot S_{x'} \subseteq \gamma^{-1} \cdot C_{z'} = C_z.$$

Łącznie otrzymujemy, że $\mathcal{C}$ jest quasi-G-niezmienniczy ze stałą skoku $NWW(L, J')$. $\square$

Fakt 7.15. *Niech $\theta \geq 0$, $\mathcal{C}$ będzie systemem θ-słabym i niech $x, y \in G$ spełniają $T^B_{\theta+1}(x) = T^B_{\theta+1}(y)$. Wówczas zachodzi*

$$|\mathcal{C}|_{|y|} \cap S_y = yx^{-1} \cdot \big(|\mathcal{C}|_{|x|} \cap S_x\big).$$

W szczególności lewostronne przesunięcie o yx^{-1}, stosowane do oddzielonych podzbiorów S_x, zachowuje domknięcia i wnętrza obliczane odpowiednio w $|\mathcal{C}|_{|x|}$ i $|\mathcal{C}|_{|y|}$.

Dowód. Oznaczmy $n = |x|$, $m = |y|$ oraz $\gamma = yx^{-1}$. Ze względu na symetrię sytuacji wystarczy dowieść jednego z zawierań. Niech $p \in |\mathcal{C}|_n \cap S_x$; wówczas p należy do pewnego $C_{x'} \in \mathcal{C}_n$. W szczególności, mamy

$$p \;\in\; S_x \cap C_{x'} \;\subseteq\; S_x \cap S_{x'}.$$

Oznaczmy $y' = \gamma x'$. Wówczas z faktu 7.13b mamy $T^B_\theta(y') = T^B_\theta(x')$, zatem (QI4a) daje równość $C_{y'} = \gamma \cdot C_{x'}$, a także $S_y = \gamma \cdot S_x$. Wobec tego zachodzi

$$\gamma \cdot p \;\in\; \gamma \cdot (C_{x'} \cap S_x) \;=\; C_{y'} \cap S_y \;\subseteq\; |\mathcal{C}|_m \cap S_y.$$

$\square$

7.2 Rozłączne prawie-pokrycia

Zanim przystąpimy do konstrukcji, wprowadzimy przydatne oznaczenia i konwencje, które będą wykorzystywane w dowodach w tym rozdziale.

W dowodach lematów 7.16 i 7.17 użyjemy następujących oznaczeń, zależnych od parametru θ (występującego w treści obu lematów). Niech $\tau_1, \ldots, \tau_K$ będzie pewnym ustawieniem w ciąg wszystkich możliwych wartości typu $T^B_{\theta+1}$. Dla uproszczenia będziemy utożsamiać typ τ_i z liczbą naturalną i. Dla każdego $1 \leq i \leq K$ ustalmy dowolny element x_i taki, że $T^B_{\theta+1}(x_i) = i$, i oznaczmy $S_i = S_{x_i}$, $n_i = |x_i|$. Podobnie, niech $1, \ldots, \widetilde{K}$ będzie ciągiem zawierającym wszystkie możliwe wartości typu $T^B_{\theta+2}$, zaś dla każdego $1 \leq \widetilde{\imath} \leq \widetilde{K}$ niech $\widetilde{x}_{\widetilde{\imath}} \in G$ będzie ustalonym elementem takim, że $T^B_{\theta+2}(\widetilde{x}_{\widetilde{\imath}}) = \widetilde{\imath}$. Oznaczamy również $M = \max_{\widetilde{\imath}=1}^{\widetilde{K}} |\widetilde{x}_{\widetilde{\imath}}|$.

W dalszej części rozdziału 7 będziemy na ogół rozważać podsystemy danego systemu półdomkniętego (który w lematach 7.16 i 7.17 ma nazwę $\mathcal{C}$), a ogólniej — podzbiory przestrzeni X, o których wiadomo, że zawierają się w $|\mathcal{C}|_n$ dla pewnego n (znanego z kontekstu). O ile nie zaznaczymy wyraźnie inaczej, podstawowe operacje topologiczne dla takich zbiorów (domknięcie, wnętrze, brzeg) będą wykonywane w przestrzeni $|\mathcal{C}|_n$ (dla odpowiedniej wartości n). Nie wpłynie to na wynik domknięć, jako że $|\mathcal{C}|_n$ jest domkniętym podzbiorem X, jednak będzie mieć znaczenie dla wnętrz i brzegów.

Niniejszy podrozdział zawiera dowód następującego wyniku.

Lemat 7.16. *Niech $k \geq 0$, $\theta \geq 1$ i niech $\mathcal{C} = \{C_x\}$ będzie półdomkniętym θ-słabym systemem wymiaru $\leq k$ w X. Wówczas istnieją:*

- *rozłączny, otwarty, $(\theta+2)$-słaby podsystem $\mathcal{G} = \{G_x\}$ w $\mathcal{C}$;*
- *domknięty, $(\theta+2)$-słaby podsytem $\mathcal{F} = \{F_x\}$ w $\mathcal{C}$ wymiaru $\leq k-1$*

takie, że $\mathcal{F} \sqcup \mathcal{G}$ pokrywa $\mathcal{C}$ oraz $\partial G_x \subseteq |\mathcal{F}|_n$ dla każdych $n \geq 0$ i $G_x \in \mathcal{G}_n$.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ będzie minimum wszystkich liczb Lebesgue'a dla pokryć otwartych $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_M$. Definiujemy:

$$I_x = \{p \in S_x \mid B(p, \varepsilon) \subseteq S_x\} \qquad \text{for } x \in G,\ |x| \leq M$$

oraz

$$G_i = \bigcup_{|x| \leq M,\, T^B_{\theta+1}(x) = i} x_i x^{-1} \cdot I_x, \qquad H_i = X \setminus S_i \qquad \text{for } 1 \leq i \leq K.$$

Ustalmy pewne $1 \leq i \leq K$. Zauważmy, że dla każdego x zachodzi $d(I_x, X \setminus S_x) \geq \varepsilon$, skąd wynika, że G_i jest skończoną sumą oddzielonych podzbiorów S_i; wobec tego $\overline{G_i} \cap \overline{H_i} = \emptyset$ (w X). Wówczas przecięcia $\overline{G_i} \cap |\mathcal{C}|_{n_i}$, $\overline{H_i} \cap |\mathcal{C}|_{n_i}$ są rozłącznymi domkniętymi podzbiorami $|\mathcal{C}|_{n_i}$, zatem na mocy twierdzenia 7.4 istnieją otwarte podzbiory $|\mathcal{C}|_{n_i}$

$$\widetilde{G}_i \supseteq \overline{G_i} \cap |\mathcal{C}|_{n_i}, \qquad \widetilde{H}_i \supseteq \overline{H_i} \cap |\mathcal{C}|_{n_i}, \qquad (G_i, H_i \text{ domykane w } X)$$

które razem pokrywają $|\mathcal{C}|_{n_i}$ oprócz pewnego podzbioru wymiaru $\leq k-1$ (który musi zawierać $\partial \widetilde{G}_i$).

Dla dwolnego $x \in G$ oznaczamy $|x| = n$ oraz $T^B_{\theta+1}(x) = i$, po czym definiujemy

$$\begin{aligned} D_x &= x x_i^{-1} \cdot \widetilde{G}_i, \\ E_x &= D_x \setminus \bigcup_{y \in G,\, |y| = n,\, T^B_{\theta+1}(y) < T^B_{\theta+1}(x)} D_y, \\ F_x &= \partial E_x, \\ G_x &= \operatorname{int} E_x. \end{aligned}$$

Zauważmy, że zachodzi $\partial G_x = \overline{G_x} \setminus G_x \subseteq \overline{E_x} \setminus \operatorname{int} E_x = \partial E_x = F_x$, zgodnie z tezą lematu.

Pozostałą część dowodu przeprowadzimy w następujących krokach (wśród których punkty **(a)** i **(b)** są pomocnicze):

(a) $\mathcal{D} = \{D_x\}_{x \in G}$ pokrywa $\mathcal{C}$;
(b) $\mathcal{E} = \{E_x\}_{x \in G}$ jest rozłączny i pokrywa $\mathcal{C}$;
(c) $\mathcal{F} = \{F_x\}_{x \in G}$ jest wymiaru $\leq k-1$;

(d) $\mathcal{G} = \{G_x\}_{x\in G}$ jest rozłączny;
(e) $F_x \subseteq S_x$ dla każdego $x \in G$;
(f) $\mathcal{F} \sqcup \mathcal{G}$ pokrywa $\mathcal{C}$;
(g) $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ są $(\theta+2)$-słabe.

(a) Aby sprawdzić, że $\mathcal{D}$ pokrywa $\mathcal{C}$, wybierzmy dowolne $p \in |\mathcal{C}|_n$; wówczas p należy do pewnego $S_x \in \mathcal{S}_n$. Oznaczmy
$$\widetilde{\imath} = T^B_{\theta+2}(x), \qquad \gamma = x\widetilde{x}_{\widetilde{\imath}}^{-1}, \qquad p' = \gamma^{-1}\cdot p.$$
Wówczas $p' \in S_{\widetilde{x}_{\widetilde{\imath}}}$. Z definicji ε wynika, że $B(p',\varepsilon) \subseteq S_y$ dla pewnego $S_y \in \mathcal{S}_{|\widetilde{x}_{\widetilde{\imath}}|}$; wówczas $p' \in I_y$. Oznaczmy teraz
$$j = T^B_{\theta+1}(y), \qquad \beta = yx_j^{-1}, \qquad p'' = \beta^{-1}\cdot p'.$$
Z definicji mamy $p'' \in G_j$, ponadto stosując dwukrotnie fakt 7.15 otrzymujemy, że $p'' \in |\mathcal{C}|_{|x_j|}$. Z drugiej strony, skoro S_y ma niepuste przecięcie z S_{x_i}, zaś $T^B_{\theta+2}(\gamma x_i) = T^B_{\theta+2}(x_i)$, z własności (QI4b) i faktu 7.13b mamy:
$$S_{\gamma\beta x_j} \;=\; S_{\gamma y} \;=\; \gamma\cdot S_y \;\ni\; \gamma\cdot p' \;=\; p, \qquad T^B_{\theta+1}(\gamma\beta x_j) = T^B_{\theta+1}(\gamma y) = T^B_{\theta+1}(y) = j,$$
co oznacza, że
$$p \;=\; \gamma\beta\cdot p'' \;\in\; \gamma\beta\cdot(G_j \cap |\mathcal{C}|_{|x_j|}) \;\subseteq\; \gamma\beta\cdot\widetilde{G}_j \;\subseteq\; D_{\gamma\beta x_j}.$$

(b) Przypuśćmy, że $p \in E_x \cap E_y$ dla pewnych $x \neq y$. Wówczas $S_x \cap S_y \neq \emptyset$, zatem na mocy faktu 7.13a typy $T^B_{\theta+1}(x)$, $T^B_{\theta+1}(y)$ są różne; załóżmy bez utraty ogólności, że mniejszym z nich jest $T^B_{\theta+1}(x)$. Wówczas z definicji $p \in E_x \subseteq D_x$ nie może należeć do E_y. To oznacza, że system $\mathcal{E}$ jest rozłączny.

Niech teraz $p \in |\mathcal{C}|_n$ i niech $x \in G$ długości n będzie takie, że $p \in D_x$, a przy tym $T^B_{\theta+1}(x)$ jest najmniejsze możliwe. Wówczas z definicji mamy $p \in E_x$. To oznacza, że $\mathcal{E}$ pokrywa $\mathcal{C}$.

(c) Zauważmy najpierw, że jeśli $x \in G$ i $T^B_{\theta+1}(x) = i$, to z faktu 7.15 oraz definicji zbiorów D_x i $\widetilde{G}_i$ mamy:
$$\dim\partial D_x = \dim\partial\big(xx_i^{-1}\cdot\widetilde{G}_i\big) = \dim\big(xx_i^{-1}\cdot\partial\widetilde{G}_i\big) = \dim\partial\widetilde{G}_i \leq k-1.$$

Ustalmy pewne $n \geq 0$. Przypomnijmy, że dla dowolnych podzbiorów Y, Z w jakiejkolwiek przestrzeni topologicznej mamy $\partial(Y\setminus Z) \subseteq \partial Y \cup \partial Z$. Stosując ten fakt skończenie wiele razy w definicji każdego ze zbiorów E_x dla $|x| = n$, otrzymujemy, że zbiór $|\mathcal{F}|_n = \bigcup_{|x|=n}\partial E_x$ zawiera się w sumie $\bigcup_{|x|=n}\partial D_x$. Ponieważ jest to skończona suma domkniętych podzbiorów wymiaru $\leq k-1$, na mocy twierdzenia 1.5.3 w [6] ma ona wymiar $\leq k-1$, co dowodzi, $\mathcal{F}$ jest wymiaru $\leq k-1$.

(d) wynika natychmiast z **(b)**.

(e) Zauważmy najpierw, że dla każdego $1 \leq i \leq K$ zachodzi
$$\overline{D_{x_i}} = \overline{\widetilde{G}_i} \subseteq |\mathcal{C}|_{n_i}\setminus\widetilde{H}_i \subseteq X\setminus\overline{H_i} = \operatorname{int} S_{x_i}.$$

Niech teraz $x \in G$; oznaczmy $T^B_{\theta+1}(x) = i$ i $\gamma = xx_i^{-1}$. Przesunięcie o element γ jest oczywiście homeomorfizmem przesyłającym S_{x_i} na S_x oraz D_{x_i} na D_x; co więcej, na mocy faktu 7.15 zachowuje ono domknięcia i wnętrza (obliczane w odpowiednich przestrzeniach $|\mathcal{C}|_n$). Wobec tego mamy:
$$F_x \subseteq \overline{E_x} \subseteq \overline{D_x} = \gamma\cdot\overline{D_{x_i}} \subseteq \gamma\cdot\operatorname{int} S_{x_i} = \operatorname{int} S_x.$$

(f) wynika łatwo z **(b)**:
$$|\mathcal{C}|_n\setminus|\mathcal{G}|_n = |\mathcal{C}|_n\setminus\bigcup_{|x|=n}G_x \subseteq \bigcup_{|x|=n}\big(E_x\setminus G_x\big) \subseteq \bigcup_{|x|=n}\partial E_x = |\mathcal{F}|_n.$$

(g) Niech $T^B_{\theta+2}(x) = T^B_{\theta+2}(y)$ dla pewnych $x, y \in G$. Oznaczmy $\gamma = yx^{-1}$. Na mocy faktu 7.15 wystarczy sprawdzić, że $E_y = \gamma \cdot E_x$. Wykażemy, że $\gamma \cdot E_x \subseteq E_y$; zawieranie przeciwne jest analogiczne.

Niech $i = T^B_{\theta+1}(x) = T^B_{\theta+1}(y)$ oraz $p \in E_x$. Wówczas w szczególności $p \in D_x$, a więc

$$\gamma \cdot p = yx_i^{-1} \cdot (x_i x^{-1} \cdot p) \in D_y.$$

Przypuśćmy, że $\gamma \cdot p \notin E_y$; wówczas dla pewnego $y' \in G$ musi zachodzić

$$|y'| = |y|, \qquad T^B_{\theta+1}(y') < i, \qquad \gamma \cdot p \in D_{y'}.$$

W szczególności mamy $\emptyset \neq D_y \cap D_{y'} \subseteq S_y \cap S_{y'}$. Na mocy faktu 7.13b oznaczając $x' = \gamma^{-1} y'$, otrzymujemy:

$$|x'| = |x|, \qquad T^B_{\theta+1}(x') = T^B_{\theta+1}(y').$$

W szczególności, ponieważ $T^B_{\theta+1}(x') = T^B_{\theta+1}(y')$ i $x' = \gamma^{-1} y'$, musi zachodzić $D_{x'} = \gamma^{-1} \cdot D_{y'} \ni p$. Jednak to przeczy założeniu, że $p \in E_x$, gdyż $T^B_{\theta+1}(x') < T^B_{\theta+1}(x)$. $\square$

7.3 Lemat o quasi-niezmienniczym otaczaniu

Lemat 7.17. *Niech $k \geq 0$, $\theta \geq 0$ i załóżmy, że:*

- *$\mathcal{C} = \{C_x\}_{x \in G}$ jest θ-słabym systemem półdomkniętym;*
- *$\mathcal{D} = \{D_x\}_{x \in G}$ jest $(\theta+1)$-słabym domkniętym podsystemem w $\mathcal{C}$ rzędu $\leq k$.*

Wówczas istnieje $(\theta+1)$-słaby otwarty podsystem $\mathcal{G} = \{G_x\}_{x \in G}$ w $\mathcal{C}$, który pokrywa $\mathcal{D}$, a ponadto system domknięć $\overline{\mathcal{G}} = \{\overline{G_x}\}_{x \in G}$ jest $(\theta+1)$-słaby oraz rzędu $\leq k$.

Uwaga 7.18. W sytuacji, gdy $\mathcal{G}$ jest $(\theta+1)$-słaby, warunek $(\theta+1)$-słabości systemu domknięć $\overline{\mathcal{G}}$ jest równoważny temu, by $\overline{G_x} \subseteq S_x$ dla każdego $x \in G$.

Dowód lematu 7.17. W dowodzie wykorzystamy oznaczenia i konwencje wprowadzone na początku rozdziału 7.2. Będziemy też wielokrotnie (i niejawnie) wykorzystywać fakt 7.15 do kontrolowania obrazów domknięć lub wnętrz (wykonywanych "w $\mathcal{C}$") przy przesunięciach o elementy z G.

1. Dla $1 \leq i \leq K$ określamy indukcyjnie podzbiór otwarty $G_i \Subset S_{x_i}$ zawierający D_{x_i} tak, aby spełnić warunek:

$$\text{(7.1)}\qquad \begin{array}{l} \text{jeśli } x, y \in G \text{ spełniają } |x| = |y| \leq M,\ T^B_{\theta+1}(x) = i,\ T^B_{\theta+1}(y) = j \text{ oraz } D_x \cap D_y = \emptyset, \text{ to:} \\ (xx_i^{-1} \cdot \overline{G_i}) \cap D_y = \emptyset, \text{ a ponadto } (xx_i^{-1} \cdot \overline{G_i}) \cap (yx_j^{-1} \cdot \overline{G_j}) = \emptyset \text{ w przypadku, gdy } j < i. \end{array}$$

Taki wybór jest możliwy, ponieważ od zbioru G_i wymagamy jedynie tego, aby był otwartym otoczeniem D_{x_i} o domknięciu rozłącznym z sumą zbiorów następującej postaci:

$$|\mathcal{C}|_{n_i} \setminus S_{x_i}, \qquad x_i x^{-1} \cdot D_y, \qquad x_i x^{-1} y x_j^{-1} \cdot \overline{G_j}.$$

Ponieważ mowa tu o skończonej sumie zbiorów domkniętych (na mocy założenia $|x|, |y| \leq M$), zaś X jest przestrzenią metryczną, wystarczy sprawdzić, że każdy z tych zbiorów jest rozłączny z D_{x_i}.

W przypadku zbioru $|\mathcal{C}_{n_i}| \setminus S_{x_i}$ jest to oczywiste. Gdyby zachodziło $D_{x_i} \cap (x_i x^{-1} \cdot D_y) \neq \emptyset$ dla pewnych x, y jak powyżej, wynikałoby stąd, że

$$D_x \cap D_y = (xx_i^{-1} \cdot D_{x_i}) \cap D_y \neq \emptyset,$$

co przeczy jednemu z założeń w warunku (7.1). Podobnie, gdyby $D_{x_i} \cap (x_i x^{-1} y x_j^{-1} \cdot \overline{G_j}) \neq \emptyset$ dla pewnego $j < i$, to wynikałoby stąd, że $D_x \cap (y x_j^{-1} \cdot \overline{G_j}) \neq \emptyset$, co przeczy założeniu, że zbiór G_j został (uprzednio) wybrany tak, by spełnić (7.1).

2. Niech teraz

$$G_x = x x_i^{-1} \cdot G_i \qquad \text{dla} \qquad x \in G,\, T^B_{\theta+1}(x) = i.$$

Wówczas system $\mathcal{G} = \{G_x\}_{x \in G}$ jest oczywiście otwarty, $(\theta+1)$-słaby i pokrywa $\mathcal{D}$. W tej sytuacji $(\theta+1)$-słabość systemu $\overline{\mathcal{G}}$ wynika z faktu 7.15 (ponieważ $G_i \Subset S_{x_i}$ i wobec tego $G_x \Subset S_x$ dla $x \in G$). Pozostaje sprawdzić, że $\overline{\mathcal{G}}$ jest rzędu $\leq k$.

3. Niech $x, y \in G$ będą takie, że $|x| = |y|$ oraz $\overline{G_x} \cap \overline{G_y} \neq \emptyset$; oznaczmy $T^B_{\theta+1}(x) = i$, $T^B_{\theta+1}(y) = j$. Niech x' spełnia $|x'| \leq M$ i $T^B_{\theta+2}(x') = T^B_{\theta+2}(x)$. Skoro $\overline{G_x} \cap \overline{G_y} \neq \emptyset$, to również $S_x \cap S_y \neq \emptyset$, a wówczas z faktu 7.13b (w połączeniu z własnością (QI4a) dla systemu $\mathcal{G}$) otrzymujemy:

$$T^B_{\theta+1}(y') = j, \qquad |y'| = |x'| \leq M, \qquad \overline{G_{x'}} \cap \overline{G_{y'}} = x' x^{-1} \cdot (\overline{G_x} \cap \overline{G_y}) \neq \emptyset, \qquad \text{gdzie} \quad y' = x' x^{-1} y.$$

Wówczas wnioskujemy, że

$$\emptyset \neq \overline{G_{x'}} \cap \overline{G_{y'}} = (x' x_i^{-1} \cdot \overline{G_i}) \cap (y' x_j^{-1} \cdot \overline{G_j}),$$

a więc z (7.1) wynika, że $D_{x'} \cap D_{y'} \neq \emptyset$. Wówczas, skoro $\mathcal{D}$ jest $(\theta+1)$-słaby, mamy:

$$D_x \cap D_y = x x'^{-1} \cdot (D_{x'} \cap D_{y'}) \neq \emptyset.$$

Oznacza to, że dla elementów $x, y \in G$ o równej długości zbiory $\overline{G_x}$ i $\overline{G_y}$ mogą przecinać się nietrywialnie jedynie wtedy, gdy $D_x \cap D_y \neq \emptyset$, skąd wynika, że rząd rodziny $\overline{\mathcal{G}}$ nie przekracza rzędu $\mathcal{D}$. To kończy dowód. □

7.4 Pełna konstrukcja

Poniższy lemat przedstawia indukcyjną procedurę konstrukcji pokrycia, którą wykorzystamy w dowodzie lematu 7.1.

Lemat 7.19. *Niech $k \geq -1$, $\theta \geq 1$ i niech $\mathcal{C}$ będzie półdomkniętym, θ-słabym systemem wymiaru $\leq k$. Wówczas istnieją $(\theta + 3(k+1))$-słabe podsystemy $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ w $\mathcal{C}$ rzędu $\leq k+1$ i pokrywające $\mathcal{C}$, przy czym $\mathcal{D}$ jest domknięty, zaś $\mathcal{E}$ — otwarty.*

Dowód. Rozumujemy przez indukcję względem k. Jeśli $k = -1$, system $\mathcal{C}$ składa się ze zbiorów pustych, wobec czego możemy przyjąć $\mathcal{D} = \mathcal{E} = \mathcal{C}$.

Niech teraz $k > -1$. Oznaczmy $\Theta = \theta + 3(k+1)$. Rozumujemy w następujących krokach:

1. Stosując lemat 7.16 do systemu $\mathcal{C}$, otrzymujemy $(\theta+2)$-słabe systemy $\mathcal{G} = \{G_x\}_{x \in G}$ oraz $\mathcal{F}$ o własnościach opisanych w treści tego lematu.

2. Ponieważ $\mathcal{F}$ jest domknięty (a więc też półdomknięty), $(\theta+2)$-słaby i ma wymiar $\leq k-1$, spełnia założenia bieżącego lematu (dla parametrów $k-1$ oraz $\theta+2$). Wobec tego, z założenia indukcyjnego, istnieje $(\Theta-1)$-słaby system domknięty $\mathcal{D}'$ rzędu $\leq k$, pokrywający $\mathcal{F}$.

3. Ponieważ $\mathcal{C}$ jest θ-słaby, jest również $(\Theta-2)$-słaby, co oznacza, że systemy $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}'$ spełniają założenia lematu 7.17 (dla parametrów k oraz $\Theta - 2$). Wobec tego istnieje otwarty, $(\Theta-1)$-słaby podsystem $\mathcal{G}' = \{G'_x\}_{x \in G}$ w $\mathcal{C}$, pokrywający $\mathcal{D}'$, a ponadto system domknięć $\mathcal{F}' = \{\overline{G'_x}\}_{x \in G}$ jest $(\Theta-1)$-słaby i rzędu $\leq k$.

4. Określamy teraz $\mathcal{D} = \{D_x\}_{x\in G}$ oraz $\mathcal{E} = \{E_x\}_{x\in G}$ następująco:

$$D_x = (G_x \setminus |\mathcal{G}'|_n) \cup F'_x, \qquad E_x = G_x \cup G'_x \qquad \text{dla} \quad x \in G,\ |x| = n. \tag{7.2}$$

Zauważmy, że $G_x \setminus |\mathcal{G}'|_n$ jest domknięty, ponieważ z tezy lematu 7.16 mamy $\partial G_x \subseteq |\mathcal{F}|_n \subseteq |\mathcal{D}'|_n \subseteq |\mathcal{G}'|_n$, a więc $G_x \setminus |\mathcal{G}'|_n = \overline{G_x} \setminus |\mathcal{G}'|_n$ jest różnicą podzbioru domkniętego i otwartego (w $|\mathcal{C}|_n$). Wobec tego D_x jest domknięty. Natomiast E_x jest oczywiście otwarty w $|\mathcal{C}|_n$.

Skoro $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}'$ i $\mathcal{G}'$ są wszystkie $(\Theta - 1)$-słabe, $\mathcal{D}$ i $\mathcal{E}$ muszą być Θ-słabe (dokładniej: $\mathcal{E}$ jest oczywiście $(\Theta - 1)$-słaby, a więc też Θ-słaby, natomiast w przypadku $\mathcal{D}$ korzystamy z faktu 7.15). Łatwo również zauważyć, że

$$|\mathcal{E}_n| \;=\; |\mathcal{G}|_n \cup |\mathcal{G}'|_n \;\supseteq\; |\mathcal{G}|_n \cup |\mathcal{F}|_n \;=\; |\mathcal{C}|_n, \qquad |\mathcal{D}|_n \;=\; \big(|\mathcal{G}|_n \setminus |\mathcal{G}'|_n\big) \cup |\mathcal{F}'|_n \;=\; |\mathcal{G}|_n \cup |\mathcal{F}'|_n \;\supseteq\; |\mathcal{E}|_n,$$

zatem $\mathcal{D}$ i $\mathcal{E}$ pokrywają $\mathcal{C}$. Wreszcie, skoro $\mathcal{G}$ jest rozłączny, zaś $\mathcal{F}'$ (a więc też $\mathcal{G}'$) jest rzędu $\leq k$, to $\mathcal{D}$ i $\mathcal{E}$ muszą być rzędu $\leq k + 1$ na mocy faktu 7.7. □

Dowód lematu 7.1. Teza wynika z zastosowania lematu 7.19 do systemu $\mathcal{S}$ (zdefiniowanego w rozdziale 3.3). Jest to system półdomknięty i 0-słaby, a więc również 1-słaby, zatem z lematu otrzymujemy, że istnieje otwarty, $(3k + 4)$-słaby system $\mathcal{E}$ rzędu $\leq k + 1$, pokrywający $\mathcal{S}$.

Skoro $\mathcal{S}$ jest systemem pokryć, zaś $\mathcal{E}$ jest otwarty i pokrywa $\mathcal{S}$, to $\mathcal{E}$ również jest systemem pokryć. Zatem z lematu 7.14 wynika, że (dla funkcji typu T^B_{3k+5}) $\mathcal{E}$ jest systemem quasi-G-niezmienniczym. Tym samym $\mathcal{E}$ spełnia wszystkie żądane własności. □

Rozdział 8

Jednorodne kompakty prawie markowowskie

Celem tego rozdziału jest uzyskanie symplicjalnych analogów dla wybranych topologicznych własności samopodobieństwa przestrzeni ∂G. Własności te wiążą się z działaniem grupy G na własnym brzegu, o którym wiadomo między innymi, że:

- orbita dowolnego punktu $p \in \partial G$ jest gęsta w G ([7, stw. 4.2]), co oznacza topologiczną "niemal jednorodność" przestrzeni ∂G;
- dla dowolnego $g \in G$ rzędu nieskończonego oraz $\varepsilon > 0$ istnieją zbiory otwarte $U, V \subseteq \partial G$ o średnicy mniejszej niż ε oraz $n \geq 0$ takie, że $g^n \cdot U \supseteq \partial G \setminus V$ ([7, tw. 4.3]); wynika stąd na przykład, że wśród rozmaitości topologicznych wymiaru ≥ 2 brzegami grup hiperbolicznych są jedynie sfery.

Chcąc przetłumaczyć te własności na język kompaktów Markowa, zastąpimy homeomorfizmy (pochodzące od działania grupy) przez izomorfizmy podkompleksów (opisane diagramem (1.1)), zaś małe otoczenia otwarte w ∂G powiążemy z sympleksami w K_n przy pomocy rzutowań $\pi_n : \partial G \to K_n$. Samemu działaniu G na ∂G odpowiadają zaś w naturalny sposób "działania częściowe" G na elementach pokryć $\mathcal{U}_n$ (opisane w warunkach (QI4)) oraz na sympleksach w K_n (poprzez operację przesunięcia z definicji 4.4), wykonalne pod warunkiem zgodności odpowiednich typów.

Częściowy charakter obu operacji przesunięcia oraz związane z nimi dodatkowe założenia wydają się utrudniać bezpośrednie przeniesienie opisanych powyżej własności topologicznych do systemu (K_n). Poniżej naszym celem jest więc *poprawienie* systemu pokryć $(\mathcal{U}_n)$ tak, aby umożliwić na nim swobodne działanie przynajmniej za pomocą ustalonego elementu $g \in G$.

W zamian za tak rozumiane zwiększenie regularności zezwolimy na pojawienie się w strukturze kompaktu pojedynczej *osobliwości* w systemie typów (definicja 8.6), tj. "lokalnego wyjątku" od własności (iii) z definicji 1.9. Nie naruszymy jednak przy tym pozostałych własności kompaktu Markowa (w szczególności zachowamy ograniczenie wymiarów kompleksów K_n, co pozwala stosować łącznie wyniki z rozdziałów 7 i 8). Ponadto pokażemy, że pomimo wprowadzenia osobliwości otrzymany system odwrotny cechuje *wsteczna regularność* (definicja 8.10), dzięki której nadal jest on "skończenie generowany" w sensie analogicznym do przypadku zwykłych kompaktów Markowa (patrz lemat 8.11 i uwaga 8.13).

Odsyłając czytelnika do definicji podanych w dalszej części tekstu (jako że przytoczenie ich tutaj zajęłoby wiele miejsca), możemy streścić główne wyniki rozdziału następująco:

Twierdzenie 8.1. *Niech G będzie skończenie generowaną grupą hiperboliczną. Wówczas:*

(a) *Brzeg Gromowa ∂G można opisać jako kompakt Markowa z osobliwością (definicja 8.6), mający własność rozdrabniania oraz wstecznej regularności (definicja 8.10), wyznaczony przez pewien system odwrotny $\widetilde{\mathbf{K}} = (\widetilde{K}_n, \widetilde{f}_n)_{n \geq 0}$;*

(b) *Dla dowolnych niepustych podzbiorów otwartych $E_1, E_2 \subseteq \partial G$ takich, że E_1 zawiera punkt osobliwy systemu $\widetilde{\mathbf{K}}$, system ten zawiera dwa podsystemy (definicja 8.3) izomorficzne z zachowaniem typów (definicja 8.4) i takie, że granica jednego z nich zawiera się w E_2, zaś drugiego — zawiera $\partial G \setminus E_1$;*

(c) *Dla dowolnego typu zwyczajnego τ (definicja 8.45) w systemie $\widetilde{\mathbf{K}}$ sympleksy typu τ w tym systemie są gęste w ∂G (w sensie definicji 8.42).*

Organizacja dowodu. Punkt **(a)** wyniknie natychmiast z połączenia twierdzenia 4.1 z podanymi w rozdziale 8.5 wnioskiem 8.38 oraz faktem 8.39. Natomiast punkty **(b)** i **(c)** wykażemy w rozdziale 8.6 odpowiednio jako lematy 8.40 i 8.47. □

Zawartość rozdziału przedstawia się następująco. W rozdziale 8.2 znajdziemy w systemie (K_n) *typ samopotomny* (w sensie sprecyzowanym we wniosku 8.15), co pozwoli nam zbudować w rozdziale 8.3 zstępujący ciąg elementów $(A_n)_{n \geq 0}$ należących do $(\mathcal{U}_n)$, dopuszczający działanie *półgrupy* generowanej przez pewien element $g \in G$.

Kluczowa konstrukcja, opisana w rozdziale 8.4, polega zasadniczo na skorygowaniu systemu $(\mathcal{U}_n)$ tak, by zachowywało go również działanie ujemnymi potęgami g, co osiągniemy zastępując zbiory położone "poza" A_0 przez odpowiednie przesunięcia zbiorów "wewnętrznych". Idea jest zatem prosta, jednak jej poprawne wykonanie wymaga pokonania kilku technicznych trudności.

Ponieważ uzyskany system pokryć nie będzie quasi-G-niezmienniczy, będziemy musieli sprawdzić dla niego założenia twierdzenia 3.2, co zrobimy w rozdziale 8.4.3. Następnie w rozdziale 8.5 zajmiemy się otrzymanym zeń systemem kompleksów, określając typy sympleksów i sprawdzając własności wymagane dla kompaktów Markowa z osobliwością, co zakończy dowód punktu **(a)** twierdzenia 8.1. Wreszcie, w rozdziale 8.6 wykażemy dalsze własności regularności dla rozważanego kompaktu, dowodząc pozostałych punktów twierdzenia.

8.1 Kompakty Markowa z osobliwością

8.1.1 Oznaczenia dla systemów odwrotnych

W tym rozdziale systemy odwrotne kompleksów symplicjalnych postaci $(K_n, f_n)_{n \geq n_0}$, gdzie $f_n : K_{n+1} \to K_n$, będziemy oznaczać pogrubioną czcionką, np. $\mathbf{K}$. Przypomnijmy, że w systemie tego typu symbolem f_b^a (dla $a \geq b \geq n_0$) oznaczamy złożenie $f_b \circ f_{b+1} \circ \ldots \circ f_{a-1} : K_a \to K_b$.

Uwaga 8.2. Wszelkie systemy odwrotne będziemy domyślnie traktować jako indeksowane począwszy od zera. Innymi słowy, dowolne wyrażenie postaci $\mathbf{K} = (K_n)_{n \geq n_0}$ należy ściśle rozumieć jako system postaci $(K_{m+n_0})_{m \geq 0}$. Konwencja ta jest istotna dla znaczenia definicji 8.4 i lematu 8.11.

Definicja 8.3. *Podsystemem* w systemie $\mathbf{K} = (K_n, f_n)_{n \geq 0}$ nazwiemy dowolny system odwrotny postaci $\mathbf{L} = \big(L_{n+k}, f_{n+k}\big|_{L_{n+k+1}}\big)_{n \geq 0}$, gdzie

$$k \geq 0, \qquad L_k \text{ jest podkompleksem w } K_k, \qquad L_{n+k} = (f_k^{n+k})^{-1}(L_k) \text{ dla } n \geq 0.$$

W powyższej sytuacji powiemy, że $\mathbf{L}$ jest *podsystemem* $\mathbf{K}$ *generowanym przez* podkompleks L_k, i oznaczymy go przez $\mathbf{K}[L_k]$. Jeśli $k = 0$, powiemy, że $\mathbf{L}$ jest *zawarty* w $\mathbf{K}$.

Dekapitację systemu $\mathbf{K} = (K_n)_{n\geq 0}$ (ozn. $\mathbf{K}^{\downarrow}$) definiujemy jako $\mathbf{K}[K_1]$, czyli efekt usunięcia z $\mathbf{K}$ poziomu o najniższym numerze.

Definicja 8.4. *Izomorfizmem* pomiędzy systemami odwrotnymi $\mathbf{K} = (K_n, f_n)$ i $\mathbf{L} = (L_n, g_n)$ nazwiemy ciąg $I = (i_n)_{n\geq 0}$ izomorfizmów symplicjalnych $i_n : K_n \to L_n$ dla $n \geq 0$ takich, że

$$g_n \circ i_{n+1} = i_n \circ f_n \qquad \text{dla} \quad n \geq 0.$$

Jeśli kompleksy $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$ rozpatrujemy wraz z przyporządkowaniem sympleksom ich typów (jak w definicji 1.9), izomorfizm $I = (i_n) : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ nazwiemy *typowanym*, jeśli wszystkie jego składowe i_n zachowują typy sympleksów.

Typowanym włożeniem systemu $\mathbf{K}$ w $\mathbf{L}$ będziemy nazywać typowany izomorfizm między $\mathbf{K}$ a pewnym systemem $\mathbf{L}'$ zawartym w $\mathbf{L}$.

Uwaga 8.5. Używając powyższych definicji, można (w świetle uwagi 8.2) przeformułować warunek (iii) z definicji 1.9 następująco: dla dowolnych sympleksów $s \in K_i$, $s' \in K_j$ tego samego typu istnieje typowany izomorfizm $\mathbf{K}[s] \simeq \mathbf{K}[s']$ (gdzie $\mathbf{K}$ oznacza rozważany w definicji 1.9 system (K_n, f_n)).

8.1.2 Definicja i podstawowe własności

Definicja 8.6. Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną i $x_* \in X$. Parę (X, x_*) nazwiemy *kompaktem Markowa z osobliwością*, jeśli X można przedstawić jako granicę odwrotną systemu $\mathbf{K} = (K_n, f_n)_{n\geq 0}$, gdzie dla $n \geq 0$ w wielościanie K_n wyróżniono wierzchołek x_n, a przy tym:

(i) system $\mathbf{K}$ spełnia warunki (i-ii) z definicji 1.9;

(ii) odwzorowania f_n zachowują wierzchołki wyróżnione, a zbudowana z nich nić $(x_n)_{n\geq 0} \in \varprojlim \mathbf{K}$ odpowiada punktowi $x_* \in X$;

(iii) sympleksom w $\mathbf{K}$ niezawierającym wierzchołka wyróżnionego (które będziemy nazywać *nieosobliwymi*) można przypisać skończenie wiele typów tak, by dla dowolnych sympleksów nieosobliwych $s \in K_i$, $s' \in K_j$ mających ten sam typ istniał typowany izomorfizm $\mathbf{K}[s] \simeq \mathbf{K}[s']$.

Własność rozdrabniania dla kompaktu Markowa z osobliwością rozumiemy tak, jak w definicji 1.10b.

Uwaga 8.7. Definicja 8.6 powstaje z definicji 1.9 poprzez wyłączenie spod typowania sympleksów osobliwych. Intuicyjnie oznacza to rezygnację z markowowskości lokalnie wokół punktu osobliwego $x_* \in X_0$. Intuicji tej nadamy sens topologiczny (przy założeniu własności rozdrabniania) w fakcie 8.9c.

Niech X będzie kompaktem Markowa z osobliwością, wyznaczonym przez system $\mathbf{K} = (K_n, f_n)$ z punktami wyróżnionymi $x_n \in K_n$.

Definicja 8.8. *Częścią regularną* kompleksu K_n (ozn. $Reg(K_n)$) nazwiemy sumę jego sympleksów nieosobliwych.

W dalszej części rozdziału 8.1 oznaczamy przez $\mathbf{R}_n$ podsystem $\mathbf{K}[Reg(K_n)]$.

Fakt 8.9. *Niech X będzie kompaktem Markowa z osobliwością, wyznaczonym przez system $\mathbf{K} = (K_n, f_n)_{n\geq 0}$ z punktami wyróżnionymi $x_n \in K_n$. Wówczas:*

(a) Dla każdego $n \geq 0$ podsystem $\mathbf{R}_n^{\downarrow}$ jest zawarty w $\mathbf{R}_{n+1}$;

(b) Dla każdego $n \geq 0$ podsystem $\mathbf{R}_n$ jest (pełnoprawnym) kompaktem Markowa;

(c) Jeśli X ma własność rozdrabniania, to granice systemów $\mathbf{R}_n$ dla $n \geq 0$ (traktowane jako podzbiory X) dają w sumie $X \setminus \{x_*\}$.

Dowód. **(a)** Ponieważ $f_n(x_{n+1}) = x_n \notin Reg(K_n)$, przeciwobraz $f_n^{-1}\big(Reg(K_n)\big)$ nie zawiera wierzchołka wyróżnionego x_{n+1}, a więc wszystkie jego sympleksy są nieosobliwe, co oznacza, że jest on zawarty w $Reg(K_{n+1})$. Wobec tego $\mathbf{R}_n^{\downarrow} = \mathbf{K}[f_n^{-1}\big(Reg(K_n)\big)]$ jest zawarty w $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{K}[Reg(K_{n+1})]$.

(b) Sprawdziliśmy przed chwilą, że dla dowolnego sympleksu nieosobliwego $s \in K_n$ w przeciwobrazie $f_n^{-1}(s)$ leżą wyłącznie sympleksy nieosobliwe, skąd indukcyjnie wynika, że $\mathbf{R}_n$ zawiera wyłącznie sympleksy nieosobliwe. Ponieważ wśród takich sympleksów obowiązuje warunek (iii) z definicji 1.9, system $\mathbf{R}_n$ zadaje kompakt Markowa.

(c) Ustalmy dowolne $i \geq 0$. Niech $\pi_n : X \to K_n$ oznacza kanoniczne rzutowanie dla systemu odwrotnego $\mathbf{K}$. Wówczas granicą systemu $\mathbf{R}_n$ jest przeciwobraz $\pi_n^{-1}(Reg(K_n))$. Jeśli więc pewien punkt $x \in X$ nie należy do sumy granic systemów $\mathbf{R}_n$, to dla każdego $n \geq 0$ punkt $\pi_n(x)$ musi leżeć w pewnym sympleksie osobliwym $s_n \in K_n$. W szczególności dla $n \geq i$ zachodzi

$$d(\pi_i(x), x_i) = d\big(f_i^n(\pi_n(x)), f_i^n(x_n)\big) \leq \operatorname{diam} f_i^n(s_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

gdzie ostatnia zbieżność wynika z własności rozdrabniania dla systemu $\mathbf{K}$. Stąd wnioskujemy, że $\pi_i(x) = x_i$, a wówczas z dowolności $i \geq 0$ wynika, że $x = x_*$, co należało sprawdzić. □

8.1.3 Kompakty wstecznie regularne

Definicja 8.10. Przy oznaczeniach z rozdziału 8.1.2 kompakt Markowa z osobliwością X nazwiemy *wstecznie regularnym*, jeśli istnieje homeomorfizm $\varphi : X \to X$ oraz typowane włożenia $\varphi_n : \mathbf{R}_n \to \mathbf{R}_n^{\downarrow}$ takie, że dla każdego $n \geq 0$ zachodzą warunki:

- $\varphi_{n+1}(\mathbf{R}_{n+1})$ jest zawarty w $\mathbf{R}_n^{\downarrow\downarrow}$;
- odwzorowanie graniczne $\varprojlim \varphi_n : \varprojlim \mathbf{R}_n \to \varprojlim \mathbf{R}_n^{\downarrow}$ jest zgodne z φ.

Lemat 8.11. *Niech X będzie wstecznie regularnym kompaktem Markowa z osobliwością, z własnością rozdrabniania, o strukturze zadanej przez system $\mathbf{K}$. Wówczas, przy powyższych oznaczeniach, przestrzeń $X \setminus \{x_*\}$ można przedstawić jako granicę odwrotną systemu $\mathbf{R}$, otrzymanego jako granica prosta (tj. przez zsumowanie na każdym poziomie) ciągu włożeń:*

$$\mathbf{R}_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathbf{R}_0^{\downarrow} \xrightarrow{\varphi_0} \mathbf{R}_0^{\downarrow\downarrow} \xrightarrow{\varphi_0} \ldots \tag{8.1}$$

Uwaga 8.12. Ponieważ zgodnie z uwagą 8.2 numerujemy w systemach odwrotnych poziomy od zera, powoduje to, że system $\mathbf{R}$ budujemy poprzez utożsamienia sympleksów pochodzących z różnych poziomów wyjściowego systemu $\mathbf{K}$. Dokładniej, jeśli oznaczymy $\mathbf{R} = (X_n, g_n)_{n\geq 0}$ oraz $\varphi_0 = (\varphi_{0,n})_{n\geq 0}$, to X_n jest granicą prostą ciągu włożeń kompleksów

$$(f_0^n)^{-1}(Reg(K_0)) \xrightarrow{\varphi_{0,n}} (f_0^{n+1})^{-1}(Reg(K_0)) \xrightarrow{\varphi_{0,n+1}} (f_0^{n+2})^{-1}(Reg(K_0)) \xrightarrow{\varphi_{0,n+2}} \ldots,$$

zaś $g_n : X_{n+1} \to X_n$ jest zgodną suma odpowiednich obcięć postaci $f_{n+k}\big|_{(f_0^{n+k+1})^{-1}(Reg(K_0))}$ dla $k \geq 0$.

Uwaga 8.13. Przypomnijmy, że przy założeniach lematu 8.11 z faktu 8.9b wynika, że system $\mathbf{R}_0$ jest zwykłym kompaktem Markowa. W takim razie lemat 8.11 wskazuje, że systemy z osobliwością efektywnie również powstają (przy założeniu własności rozdrabniania oraz wstecznej regularności) z połączenia skończenie wielu rodzajów "cegiełek budulcowych" — w znaczeniu co najmniej podobnym do tego, w jakim użyto tego określenia w [4], motywując wprowadzenie samego pojęcia kompaktu Markowa. Pominięcie punktu x_* w takim opisie nie wydaje się zaś istotnym mankamentem, ponieważ przestrzeń X można odtworzyć z niego jako uzwarcenie jednopunktowe przestrzeni $X \setminus \{x_*\} = \varprojlim \mathbf{R}$.

Dowód lematu 8.11. Niech $\mathbf{R}_0^{\downarrow k}$ oznacza k-krotną dekapitację $\mathbf{R}_0$. Niech $R_0 \subseteq X$ będzie granicą systemu $\mathbf{R}_0$ (jest to zarazem granica $\mathbf{R}_0^{\downarrow k}$ dla dowolnego $k \geq 0$). Ponieważ dowolna nić w $\mathbf{R}$ pochodzi z jednego z systemów w ciągu (8.1), zaś nici pochodzące z sąsiednich systemów w tym ciągu utożsamiane są przy pomocy włożenia $\varphi_0 : \mathbf{R}_0 \to \mathbf{R}_0$, które na mocy definicji 8.10 indukuje w granicy obcięcie $\varphi\big|_{R_0} : R_0 \to R_0$, granica odwrotna systemu $\mathbf{R}$ musi pokrywać się z sumą systemu włożeń

$$R_0 \xrightarrow{\varphi|_{R_0}} R_0 \xrightarrow{\varphi|_{R_0}} R_0 \xrightarrow{\varphi|_{R_0}} \dots \tag{8.2}$$

Ponieważ $\varphi : X \to X$ jest homeomorfizmem spełniającym $\varphi(R_0) \subseteq R_0$ (co wywnioskowaliśmy powyżej z definicji 8.10), łatwo wywnioskować indukcyjnie, że ciąg podzbiorów $\big(\varphi^{-n}(R_0)\big)_{n\geq 0}$ jest wstępujący. Oznaczając przez id naturalne włożenia podzbiorów X, otrzymujemy przemienny diagram

$$\begin{tikzcd}
R_0 \arrow[r, "\varphi|_{R_0}"] & R_0 \arrow[r, "\varphi|_{R_0}"] & R_0 \arrow[r, "\varphi|_{R_0}"] & \dots \\
R_0 \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \varphi^{-1}(R_0) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \varphi^{-2}(R_0) \arrow[u, "\varphi^2"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Wynika stąd, że

$$\varprojlim \mathbf{R} = \bigcup_{n\geq 0} \varphi^{-n}(R_0) \subseteq X. \tag{8.3}$$

Jednak z definicji 8.10 wynika, że dla każdego $n \geq 1$ zachodzi

$$\varprojlim \mathbf{R}_{n-1} \supseteq \varprojlim \mathbf{R}_{n-1}^{\downarrow\downarrow} = \varprojlim \varphi_n(\mathbf{R}_n) = \varphi\big(\varprojlim \mathbf{R}_n\big), \tag{8.4}$$

skąd przez indukcję wynika, że $\varprojlim \mathbf{R}_n \subseteq \varphi^{-n}(R_0)$ dla dowolnego $n \geq 0$, a więc suma (8.3) jest równa przynajmniej sumie $S = \bigcup_{n\geq 0} \varprojlim \mathbf{R}_n$. Zauważmy teraz, że z faktu 8.9c mamy $S = X \setminus \{x_*\}$. Z drugiej strony, z (8.4) wynika również, że $\varphi_n(S) \subseteq S$, zatem x_* musi być punktem stałym dla φ_n, zatem z jego nienależenia do R_0 wynika jego nienależenie do sumy (8.3). Tym samym wykazaliśmy, że suma ta jest równa zbiorowi $X \setminus \{x_*\}$, co kończy dowód. □

8.2 Typ samopotomny

W całym rozdziale 8 zakładamy, że G jest skończenie generowaną grupą hiperboliczną, zaś $(\mathcal{U}_n)$ quasi-G-niezmienniczym systemem pokryć G-przestrzeni $X = \partial G$ (rozpatrywanej z działaniem G przez lewostronne przesunięcia). Przypomnijmy, że przykładem takiego systemu jest ciąg $(\mathcal{S}_n)$, zdefiniowany w rozdziale 3.3. Założenie, że $X = \partial G$, zostanie wykorzystane w dowodzie faktu 8.17.

Oznaczmy $\mathcal{U} = \bigcup_n \mathcal{U}_n$ oraz $\widetilde{\mathcal{U}} = \bigcup_n \widetilde{\mathcal{U}}_n$. Dla dowolnego $U \in \mathcal{U}_n$ liczbę n nazwiemy *głębokością* (albo *poziomem*) zbioru U.

Niech J oznacza stałą skoku dla systemu $\widetilde{\mathcal{U}}$. Dla dowolnego $U \in \mathcal{U}$ elementy $V \in \mathcal{U}$ zawarte w U oraz mające głębokość większą niż U o pewną wielokrotność J nazwiemy *potomkami* U; zbiór U będziemy z kolei w takiej sytuacji nazywać *przodkiem* zbioru V.

Fakt 8.14. *W rodzinie $\widetilde{\mathcal{U}}$ istnieje typ τ_m taki, że dowolny niepusty potomek U zbioru typu τ_m posiada potomka U' typu τ_m.*

Dowód. Niech $\widetilde{\mathcal{T}}$ oznacza zbiór typów występujących w $\widetilde{\mathcal{U}}$. Definiujemy w $\widetilde{\mathcal{T}}$ relację *potomności*:

$$\tau_1 \rightsquigarrow \tau_2 \quad \Leftrightarrow \quad \tau_1 = \tau_2 \text{ lub } \exists_{U_1,U_2\in\mathcal{U} \text{ typów } \tau_1,\tau_2}\ U_2 \text{ jest potomkiem } U_1 \tag{8.5a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tau_1 = \tau_2 \text{ lub } \forall_{U_1\in\mathcal{U} \text{ typu } \tau_1}\ \exists_{U_2\in\mathcal{U} \text{ typu } \tau_2}\ U_2 \text{ jest potomkiem } U_1. \tag{8.5b}$$

Równoważność powyższych dwóch warunków wynika z warunku (QI4c). Z definicji wynika, że relacja $\rightsquigarrow$ jest przechodnia. Niech $\tau_1 \sim \tau_2$ oznacza sytuację $\tau_1 \rightsquigarrow \tau_2 \rightsquigarrow \tau_1$; wówczas $\sim$ jest relacją równoważności, zaś relacja $\rightsquigarrow$ przenosi się w naturalny sposób na klasy abstrakcji względem $\sim$, ponieważ

$$\text{jeśli } \tau_1 \rightsquigarrow \tau_2, \quad \tau_1' \sim \tau_1, \quad \tau_2' \sim \tau_2, \qquad \text{to} \quad \tau_1' \rightsquigarrow \tau_2'.$$

Ponieważ $[\tau_1] \rightsquigarrow [\tau_2] \rightsquigarrow [\tau_1]$ implikuje $[\tau_1] = [\tau_2]$, relacja $\rightsquigarrow$ na $\widetilde{\mathcal{T}}/\sim$ jest częściowym porządkiem na zbiorze skończonym. Niech $[\tau_m]$ będzie jego elementem maksymalnym (tj. bez następników względem $\rightsquigarrow$); wówczas typ τ_m ma żądaną własność. Istotnie, jeśli U_0 jest dowolnym zbiorem typu τ_m, to dla dowolnego potomka U zbioru U_0 mamy z (8.5a) $\tau_m \rightsquigarrow T(U)$, co na mocy maksymalności $[\tau_m]$ daje $[\tau_m] = [T(U)]$, a więc też $T(U) \rightsquigarrow \tau_m$. Wobec tego z (8.5b) wynika, że U posiada potomka U' typu τ_m, co należało sprawdzić. □

Wniosek 8.15. *Niech τ_m oznacza typ otrzymany w fakcie 8.14. Wówczas istnieją $l > 0$ oraz $U_x, U_y \in \widetilde{\mathcal{U}}$ takie, że*

$$\overline{U_y} \subseteq U_x, \qquad T(U_x) = T(U_y) = \tau_m, \qquad |y| = |x| + l, \qquad J \mid l. \tag{8.6}$$

Dowód. Wybierzmy dowolnie $x \in G$ tak, by $T(U_x) = \tau_m$. Niech p będzie dowolnym elementem U_x; wówczas U_x zawiera kulę w X o środku w p i pewnym promieniu ε. Na mocy własności (QI1) istnieje $k > |x|$ takie, że $J \mid k - |x|$ oraz $\max_{U\in\mathcal{U}_k} \operatorname{diam} U < \frac{\varepsilon}{2}$. Ponieważ $\mathcal{U}_k$ jest pokryciem X, istnieje $U \in \mathcal{U}_k$ zawierające p. Mamy wówczas

$$\overline{U} \subseteq \overline{B}(p, \operatorname{diam} U) \subseteq \overline{B}(p, \tfrac{\varepsilon}{2}) \subseteq U_x.$$

Z własności typu τ_m wynika, że U posiada z kolei potomka U_y będącego również typu τ_m. Wówczas y spełnia żądane własności. □

Fakt 8.16. *Niech $\mathbb{L}$ oznacza zbiór liczb naturalnych $l > 0$, dla których istnieją $U_x, U_y \in \widetilde{\mathcal{U}}$ takie, że U_x, U_y, l spełniają warunki (8.6). Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik wszystkich elementów $\mathbb{L}$. Wówczas:*

(a) *Jeśli $l \in \mathbb{L}$, to dla każdego $U_x \in \widetilde{\mathcal{U}}$ typu τ_m istnieje $U_y \in \widetilde{\mathcal{U}}$ takie, że U_x, U_y, l spełniają (8.6);*

(b) *Zbiór $\mathbb{L}$ jest niepusty i addytywny (tzn. jeśli $l_1, l_2 \in \mathbb{L}$, to $l_1 + l_2 \in \mathbb{L}$);*

(c) *Zbiór $\mathbb{L}$ zawiera wszystkie odpowiednio duże wielokrotności d.*

Dowód. **(a)** Niech $U_x \in \mathcal{U}$ będzie typu τ_m, i niech $l \in \mathbb{L}$, co oznacza, że l wraz z pewnymi $U_{x'}$, $U_{y'}$ spełnia (8.6). Wówczas przyjmując $g = xx'^{-1}$ z własności (QI4c) otrzymujemy:

$$\overline{U_{gy'}} = g \cdot \overline{U_{y'}} \subseteq g \cdot U_{x'} = U_x, \qquad T(gy') = T(y') = \tau_m, \qquad |gy'| = |x| + l,$$

co oznacza, że zbiory $U_x, U_{gy'}$ wraz z liczbą l spełniają warunki (8.6).

(b) Niepustość zbioru $\mathbb{L}$ wynika z wniosku 8.15, zaś jego addytywność z punktu **(a)**. Istotnie, jeśli zbiory U_x, U_y wraz z liczbą $l_1 > J$ spełniają (8.6), a ponadto $l_2 \in \mathbb{L}$, to na mocy punktu **(a)** istnieje U_z takie, że

$$\overline{U_z} \subseteq U_y \subseteq U_x, \qquad T(U_z) = \tau_m, \qquad |z| = |y| + l_2 = |x| + l_1 + l_2.$$

(c) Niech $\mathbb{L} = \{l_1, l_2, \ldots\}$ i niech $d_n = NWD(l_1, \ldots, l_n)$. Ponieważ d_n jest nierosnącym ciągiem liczb naturalnych, musi się stabilizować, zatem dla pewnego n zachodzi $d_n = d$. Wobec tego dla pewnych $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$a_1 l_1 + \ldots + a_n l_n = d.$$

Zwiększając każde a_i o pewną wielokrotność l_1, możemy uzyskać nowe współczynniki $a'_1, \ldots, a'_n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$a'_1 l_1 + \ldots + a'_n l_n \equiv d \pmod{l_1}.$$

Oznaczmy powyższą liczbę przez S. Wówczas $S \in \mathbb{L}$, a ponadto łatwo sprawdzić, że dowolna odpowiednio duża wielokrotność d jest postaci $aS + bl_1$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{N}$, zatem też należy do $\mathbb{L}$. $\square$

8.3 Półniezmiennicza filtracja A_n

8.3.1 Konstrukcja

Niech τ_m, $\mathbb{L}$ oraz $d = NWD(\mathbb{L})$ oznaczają to samo, co w rozdziale 8.2. Niech $x \in G$ będzie dowolnym elementem takim, że $U_x \in \widetilde{\mathcal{U}}$ jest typu τ_m. Na mocy faktu 8.16 istnieje $y \in G$ takie, że

$$\overline{U_y} \subseteq U_x, \qquad T(U_y) = T(U_x) = \tau_m, \qquad |y| = |x| + L, \tag{8.7a}$$

przy czym możemy założyć, że liczba L przekracza stałą skoku dla systemu $(\mathcal{U}_n)$, a także stałą L_0 uzyskaną dla tego systemu w lemacie 3.21. Oznaczmy

$$g = yx^{-1}, \qquad x_n = g^n x, \qquad A_n = g^n \cdot U_x, \qquad B_n = X \setminus A_n \qquad (\text{dla } n \in \mathbb{Z}). \tag{8.7b}$$

Ponieważ $T(U_y) = T(U_x)$, z własności (QI4a) mamy $A_1 = g \cdot U_x = U_y$. Stąd $A_0 \supseteq \overline{A_1}$ i wobec tego, działając elementem g^n, otrzymujemy

$$A_n \supseteq \overline{A_{n+1}} \qquad \text{dla } n \in \mathbb{Z}. \tag{8.7c}$$

Co więcej, stosując (QI4c) dla zbiorów $U_x \supseteq U_y$ oraz kolejnych $U_{g^n x}$, otrzymujemy indukcyjnie, że:

$$A_n = U_{g^n x}, \qquad T(g^n x) = \tau_m, \qquad |g^n x| = |x| + nL \qquad \text{dla } n \geq 0. \tag{8.7d}$$

Zauważmy, że dla ustalonego $D \in \mathbb{N}$ zastępując x, y przez elementy $g^D x$, $g^D y$ możemy uzyskać przesunięcie numeracji zbiorów A_n i B_n: własności (8.7) wówczas zachowują się, a ponadto (8.7d) wzmacnia się do postaci

$$A_n = U_{g^n x}, \qquad T(g^n x) = \tau_m, \qquad |g^n x| = |x| + nL \qquad \text{dla } n \geq -D. \tag{8.7e}$$

Dla wygody w dalszej części rozważań przyjmiemy, że D jest stałą równą przynajmniej 2.

8.3.2 Własności topologiczne

Ponieważ głębokości zbiorów A_n rosną, z (QI1) mamy $\operatorname{diam} A_n \to 0$. Wynika stąd, że przecięcie $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{A_n}$ składa się z jednego punktu, który jest stały dla działania elementem g; oznaczymy ten punkt przez x_∞.

Zauważmy też, że $A_n \supsetneq A_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, ponieważ w przeciwnym razie działając potęgami g otrzymalibyśmy, że $A_n = A_{n+1}$ dla każdego n, co jest niemożliwe. W szczególności $|B_0| = \infty$.

Fakt 8.17. *Rodzina* $(\operatorname{int} B_{-n})_{n \geq 0}$ *stanowi bazę otoczeń pewnego punktu* $x_{-\infty} \in X$.

Dowód. Z twierdzenia 5.2 w [7] wynika, że istnieją $a, b \in X$ oraz podciąg $(g^{-n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ takie, że

(8.8) działania elementami g^{-n_i} zbiegają do b niemal jednostajnie na zbiorze $X \setminus \{a\}$.

Przyjmujemy $x_{-\infty} := b$. Ponieważ zbiór $\operatorname{int} B_0$ ma przynajmniej dwa elementy, istnieje w nim element $p \neq a$; wówczas mamy $\lim_{i \to \infty} g^{-n_i} \cdot p = x_{-\infty}$. Jednak skoro zbiory $g^{-n} \cdot \operatorname{int} B_0 = \operatorname{int} B_{-n}$ tworzą ciąg zstępujący, punkt $x_{-\infty}$ musi należeć do każdego z nich. To oznacza, że $(\operatorname{int} B_{-n})_{n \geq 0}$ jest ciągiem otoczeń $x_{-\infty}$. W takim razie $x_{-\infty} \neq x_\infty$, a ponieważ x_∞ jest punktem stałym dla działania g, musi zachodzić $x_\infty = a$. Wobec tego $a \notin B_0$, a więc stosując ponownie (8.8) otrzymujemy, że $\operatorname{diam} B_{-n} \to 0$, co dowodzi, że ciąg $(\operatorname{int} B_{-n})_{n \geq 0}$ stanowi bazę otoczeń $x_{-\infty}$. □

Definicja 8.18. Niech $k \geq 0$ i $U \in \widetilde{\mathcal{U}}_n$. Wówczas *$k$-gwiazdą* zbioru U nazwiemy sumę U i wszystkich jego sąsiadów w odległości co najwyżej k:

$$\operatorname{st}_k(U) = \bigcup \big\{ U_k \mid U_0, U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}_n, \quad U_0 = U, \quad U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset \;\text{ dla } 1 \leq i \leq k \big\}.$$

Nie wymagamy przy tym, by zbiory $U_0, \ldots, U_k$ były parami różne. Zauważmy, że

$$\operatorname{diam} \operatorname{st}_k(U) \leq (2k+1) \cdot \max_{U' \in \mathcal{U}} \operatorname{diam} U'.$$

Fakt 8.19. *Dla dowolnego* $k \in \mathbb{Z}$ *istnieje* η_k *takie, że dla* $n \geq \eta_k$ *dowolny zbiór* $U \in \mathcal{U}_n$ *wraz ze swoją 2-gwiazdą zawiera się w* A_k *lub w* B_{k+1}.

Dowód. Ponieważ $\{A_k, \operatorname{int} B_{k+1}\}$ jest otwartym pokryciem X, wystarczy wziąć n tak duże, by średnice elementów $\mathcal{U}_n$ nie przekraczały $\frac{\varepsilon}{5}$, gdzie ε jest liczbą Lebesgue'a tego pokrycia. □

8.3.3 Przesuwalność

Przypomnijmy, że $D \geq 2$ jest stałą wprowadzoną na użytek warunku (8.7e).

Definicja 8.20. Niech $k \geq -D$. Zbiór $U \in \mathcal{U}_n$ nazwiemy k-wewnętrznym, jeśli:

$$U \neq \emptyset, \qquad U \subseteq A_k, \qquad n \geq |x_0| + (k+1)L.$$

Rodzinę zbiorów k-wewnętrznych w $\mathcal{U}_n$ oznaczymy przez $\mathcal{U}_n^{(k)}$, zaś rodzinę wszystkich zbiorów k-wewnętrznych przez $\mathcal{U}^{(k)}$. Zauważmy, że $\mathcal{U}^{(k_1)} \supseteq \mathcal{U}^{(k_2)}$ dla $k_1 \leq k_2$.

Fakt 8.21. *Niech* $k, l \geq -D$. *Wówczas jeśli* $U \in \mathcal{U}_n^{(k)}$, *to* $g^{l-k} \cdot U \in \mathcal{U}_{n+(l-k)L}^{(l)}$.

Dowód. Ponieważ zachodzi (8.7e), wystarczy zastosować (QI4c) dla zbiorów $A_k \supseteq U$ oraz A_l. □

8.4 Przedłużanie regularności z A_0 na X

Określone przed chwilą zbiory A_n dla $n \geq -D$ wskazują obszar, w którym — na mocy faktu 8.21 — system pokryć $(\mathcal{U}_n)$ przejawia zachowanie niezmiennicze ze względu na *dodatnie* potęgi elementu g (pod warunkiem zachowania odpowiednio dużej głębokości, co ujęliśmy w pojęciu zbioru k-wewnętrznego). Zgodnie z zapowiedzią z początku rozdziału 8, zdefiniujemy teraz nowe pokrycia $\mathcal{V}_n$, starając się:

- pozostawić bez zmian część zawartą w A_0 (a ściślej: zbiory 0-wewnętrzne);
- zastąpić zbiory położone poza A_0 przesunięciami zbiorów 0-wewnętrznych o ujemne potęgi g (czym rozszerzymy obszar samopodobieństwa związanego z działaniem g poza zbiór A_{-D});
- wprowadzić dodatkowy zbiór specjalny w celu pokrycia punktu $x_{-\infty}$.

Przy tym, aby zapewnić skończoność każdego z pokryć $\mathcal{V}_n$, obszar samopodobieństwa będziemy zwiększać *stopniowo* wraz z głębokością pokrycia: w $\mathcal{V}_n$ umieścimy przesunięcia zbiorów z $\mathcal{U}^{(0)}$ jedynie w granicach określonych przez zbiór A_{-n}. Oznacza to, że wykonalność przesunięcia o element g^{-m} będzie wciąż ograniczona — dozwolone wartości m będą lokalnie rosnąć wraz z głębokością pokrycia.

8.4.1 Definicja pokrycia $\mathcal{V}_n$

Określamy

$$n_0 = \max\Big(\big\{\eta_k \,\big|\, -D \leq k \leq D\big\} \cup \{|x_0| + (D+1)L\}\Big), \tag{8.9}$$

gdzie η_k są stałymi otrzymanymi z faktu 8.19. Przyjmujemy od tej pory, że system pokryć $(\mathcal{U})_n$ rozpatrujemy wyłącznie dla indeksów $n \geq n_0$. Powoduje to w szczególności, że dla każdego $U \in \mathcal{U}$ mamy

$$U \in \mathcal{U}^{(k)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \emptyset \neq U \subseteq A_k \qquad\qquad \text{dla } -D \leq k \leq D. \tag{8.10}$$

Definicja 8.22. Dla dowolnego $n \geq n_0$ definiujemy

$$\mathcal{V}_n = \big\{g^{-n} \cdot U \,\big|\, U \in \widetilde{\mathcal{U}}_{2nL},\ U \subseteq A_0\big\} \cup \{H_n\}$$

gdzie H_n jest sumą wszystkich zbiorów należących do rodziny

$$\mathcal{H}_n = \big\{g^{-n} \cdot U \,\big|\, U \in \widetilde{\mathcal{U}}_{2nL},\ U \nsubseteq A_0\big\}.$$

Elementy $\mathcal{V}_n$ różne od H_n będziemy nazywać *zwyczajnymi.*

Uwaga 8.23. Ponieważ przesunięcie zbioru wewnętrznego elementem g^{-n} w zakresie dozwolonym przez fakt 8.21 powoduje spadek głębokości o wartość nL, powyższą definicję należy rozumieć tak, że pokrycie $\mathcal{V}_n$ jest rozszerzeniem "części 0-wewnętrznej" $\mathcal{U}_{nL}$ (a nie $\mathcal{U}_{2nL}$). Obserwację tę uściślamy poniżej w fakcie 8.24. Powiązanie $\mathcal{V}_n$ z $\mathcal{U}_{nL}$ zamiast $\mathcal{U}_n$ jest dość arbitralne i służy głównie uproszczeniu notacji; dzięki temu własność gwiazdy będzie miał cały system $(\mathcal{V}_n)$, a nie jedynie podciąg $(\mathcal{V}_{nL})$.

Mniej arbitralny jest dobór zbioru H_n: wprawdzie dla samego zapewnienia, by $\mathcal{V}_n$ było pokryciem X, wystarczyłoby wziąć np. $H_n = B_{n-1}$ (co wynika z faktu 8.25), jednak przyjęte rozwiązanie ma tę zaletę, że pozwala zachować wymiary sympleksów w nerwach pokryć $\mathcal{V}_n$.

8.4.2 Własności pomocnicze

Fakt 8.24. *Dla dowolnego $n \geq n_1$ zachodzi*

$$\mathcal{V}_n \ \supseteq\ \big\{g^{-k} \cdot U \,\big|\, U \in \mathcal{U}_{(n+k)L}^{(\max(k-n,\,-D))},\ k \geq 0\big\} \ \supseteq\ \mathcal{U}_{nL}^{(-D)}.$$

Dowód. Niech $k \geq 0$, zaś U spełnia warunki z definicji środkowego zbioru. Wówczas z faktu 8.21 mamy

$$g^{-k} \cdot U = g^{-n} \cdot \big(g^{n-k} \cdot U\big), \qquad \text{przy czym} \qquad g^{n-k} \cdot U \;\in\; \mathcal{U}_{2nL}^{(\max(0,\,n-k-D))} \;\subseteq\; \mathcal{U}_{2nL}^{(0)},$$

zatem z definicji $g^{-k} \cdot U \in \mathcal{V}_n$, co dowodzi pierwszej z inkluzji. Drugą otrzymujemy, kładąc $k = 0$. $\square$

Fakt 8.25. *Dla $n \geq n_0$ zachodzi $H_{n+1} \subseteq B_{-n} \subseteq H_n$.*

Dowód. **1.** Niech $V = g^{-(n+1)} \cdot U \in \mathcal{H}_{n+1}$. Wówczas $U \not\subseteq A_0$, zatem z faktu 8.19 mamy $U \subseteq B_1$, a więc $V \subseteq B_{-n}$. Z dowolności wyboru V wynika, że $H_{n+1} \subseteq B_{-n}$.

2. Ponieważ $\mathcal{U}_{2nL}$ pokrywa X, zbiór B_0 zawiera się w sumie rodziny $\mathcal{W} = \{W \in \mathcal{U}_{2nL} \,|\, W \cap B_0 \neq \emptyset\}$. Jednak dla dowolnego $W \in \mathcal{W}$ mamy

$$W \cap B_0 \neq \emptyset \quad\Rightarrow\quad W \not\subseteq A_0 \quad\Rightarrow\quad g^{-n} \cdot W \in \mathcal{H}_n,$$

a więc $B_{-n} \subseteq \bigcup_{W \in \mathcal{W}} g^{-n} \cdot W \subseteq H_n$. $\square$

Fakt 8.26. *Jeśli $n \geq n_0$, $0 \leq d \leq D$ i $U \in \mathcal{U}_{(2n-d)L}^{(d-D)}$, to $g^{-n} \cdot U$ zawiera się w pewnym elemencie $\mathcal{V}_{n-d}$.*

Dowód. Zauważmy, że zbiór $U' = g^{-n} \cdot U$ można przedstawić następująco:

$$U' = g^{-(n-d)} \cdot \big(g^{-d} \cdot U\big), \qquad \text{przy czym} \qquad g^{-d} \cdot U \in \mathcal{U}_{(2n-2d)L}^{(-D)}.$$

W takim razie jeśli $g^{-d} \cdot U \subseteq A_0$, to U' jest elementem zwyczajnym $\mathcal{V}_{n-d}$, natomiast w przeciwnym razie U' należy do $\mathcal{H}_{n-d}$ i wobec tego zawiera się w H_{n-d}. $\square$

Fakt 8.27. *Dla dowolnych $n \geq n_0$, $0 \leq k \leq n$ oraz $V \in \mathcal{V}_n$ zachodzi co najmniej jedna z możliwości:*

- *$V \subseteq B_{-k+1}$;*
- *$V \subseteq A_{-k}$, a ponadto $V = g^{-k} \cdot U$ dla pewnego $U \in \widetilde{\mathcal{U}}_{(n+k)L}^{(0)}$.*

Dowód. Jeśli $V = H_n$, to z faktu 8.25 mamy $V \subseteq B_{-n+1} \subseteq B_{-k+1}$.

Niech więc $V \in \mathcal{V}_n$ będzie zwyczajny; wybierzmy przedstawienie V w postaci

$$V = g^{-m} \cdot U, \qquad \text{gdzie} \quad m \geq 0,\; U \in \mathcal{U}_{(n+m)L}^{(0)}$$

dla najmniejszej możliwej wartości m. (Z definicji 8.22 wynika, że $m \leq n$). Rozważmy dwa przypadki:

- Jeśli $m \leq k$, to $V = g^{-m} \cdot U = g^{-k} \cdot (g^{k-m} \cdot U)$, przy czym $g^{k-m} \cdot U \in \mathcal{U}_{(n+k)L}^{(k-m)} \subseteq \mathcal{U}_{(n+k)L}^{(0)}$. Stąd wynika natychmiast, że $V \subseteq A_{-k}$.
- W przeciwnym razie z minimalności m oraz nierówności $m > k \geq 0$ wynika, że zbiór $U' = g^{-1} \cdot U$ nie zawiera się w A_0. Wobec tego z faktu 8.19 oraz nierówności $n + (m-1)L \geq n \geq n_0$ wynika, że $U' \subseteq B_1$, a stąd $V = g^{-m+1} \cdot U' \subseteq g^{-m+1} \cdot B_1 \subseteq B_{-m+2} \subseteq B_{-k+1}$. $\square$

8.4.3 Wykonalność konstrukcji granicy odwrotnej

Lemat 8.28. *Istnieje $n_1 \geq n_0$ takie, że ciąg pokryć $(\mathcal{V}_n)_{n \geq n_1}$ spełnia założenia twierdzenia 3.2. Ponadto zachodzi $\sup_{n \geq n_1} \operatorname{rank} \mathcal{V}_n \leq \sup_{n \geq 0} \operatorname{rank} \mathcal{U}_n$.*

Dowód. Z definicji wynika, że rodzina $\mathcal{V}_n$ jest skończona oraz zawiera zbiory otwarte i niepuste (niepustość zbiorów H_n wynika z faktu 8.25). Jest też pokryciem X, ponieważ z definicji mamy

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V = \bigcup_{U \in \widetilde{\mathcal{U}}_{2nL}} g^{-n} \cdot U = X.$$

Z definicji wynika również, że jeśli punkt $p \in X$ należy do przecięcia k parami różnych elementów $\mathcal{V}_n$, to $g^n \cdot p$ należy do przecięcia (co najmniej) k parami różnych elementów $\mathcal{U}_{2nL}$. Wobec tego mamy $\operatorname{rank} \mathcal{V}_n \leq \operatorname{rank} \mathcal{U}_{2nL}$. Tym samym sprawdziliśmy warunki (i) i (ii) w treści twierdzenia 3.2.

Aby sprawdzić warunek (iii), wybierzmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wówczas na mocy faktu 8.17 istnieje n_ε takie, że $\operatorname{diam} B_{-n_\varepsilon} < \varepsilon$. Dalej, z faktu 8.27 wynika, że dowolny zbiór $V \in \mathcal{V}_n$ musi zawierać się w B_{-n_ε} lub mieć postać $g^{-(n_\varepsilon+1)} \cdot U$ dla pewnego $U \in \mathcal{U}_{(n+n_\varepsilon+1)L}$. Dla dostatecznie dużych n oznacza to, że $\operatorname{diam} V < \varepsilon$, ponieważ ciąg rodzin $(\{g^{-(n_\varepsilon+1)} \cdot U \mid U \in \mathcal{U}_m\})_{m \geq 0}$ ma własność rozdrabniania, co wynika poprzez uwagę 1.11 stąd, że $(\mathcal{U}_m)_{m \geq 0}$ ma własność rozdrabniania oraz że działanie elementem $g^{-(n_\varepsilon+1)}$ jest homeomorfizmem. Tym samym wykazaliśmy warunek (iii).

Pozostaje warunek (iv), czyli własność gwiazdy.

Niech $n > 0$, $V_0 \in \mathcal{V}_n$ i niech $V_1, \ldots, V_k$ będą wszystkimi jego sąsiadami w $\mathcal{V}_n$. Rozważamy dwa przypadki:

1. Załóżmy, że V_i są wszystkie zwyczajne, tj. dla $0 \leq i \leq k$ mamy $V_i = g^{-n} \cdot U_i$, gdzie $U_i \in \mathcal{U}^{(0)}_{2nL}$. Z własności gwiazdy dla ciągu pokryć $(\mathcal{U}_{nL})_{n \geq 0}$ wynika, że istnieje zbiór $U' \in \mathcal{U}_{(2n-1)L}$ zawierający wszystkie U_i; wobec tego zbiory V_i zawierają się wszystkie w $g^{-n} \cdot U'$.

Z drugiej strony, ponieważ $U_i \subseteq A_0$, mamy $U' \nsubseteq B_0$. Zatem na mocy faktu 8.19 mamy $U' \subseteq A_{-1}$, a stąd na mocy faktu 8.26 zbiór $g^{-n} \cdot U'$ zawiera się w pewnym elemencie $\mathcal{V}_{n-1}$.

2. Pozostaje przypadek, gdy $V_{i_0} = H_n$ dla pewnego $0 \leq i_0 \leq k$; wtedy dla $i \in \{0, \ldots, k\} \setminus \{i_0\}$ mamy

$$V_i = g^{-n} \cdot U_i, \qquad \text{gdzie} \qquad U_i \in \mathcal{U}^{(0)}_{2nL}.$$

Wybierzmy dowolne $i_1 \in \{0, \ldots, k\} \setminus \{i_0\}$. Wówczas musi istnieć $0 \leq j \leq k$ takie, że V_j przecina się niepusto zarówno z V_{i_1}, jak z V_{i_0}; można przy tym wymagać, by $j \neq i_0$. Wówczas mamy

$$\emptyset \;\neq\; g^n \cdot \big(V_j \cap H_n\big) \;=\; U_j \cap (g^n \cdot H_n) \;=\; U_j \cap \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_n^{(0)}} U,$$

zatem istnieje $U \in \mathcal{U}_n$ niezawarte w A_0 i takie, że $U \cap U_j \neq \emptyset$. Wówczas, korzystając z faktu 8.19, mamy

$$U_{i_1} \;\subseteq\; \operatorname{st}_1 U_j \;\subseteq\; \operatorname{st}_2 U \;\subseteq\; B_1 \qquad \Rightarrow \qquad V_{i_1} \;\subseteq\; g^{-n} \cdot B_1 \;=\; B_{-(n-1)}.$$

Zatem cała gwiazda zbioru V_0 zawiera się w $H_n \cup B_{-(n-1)}$, czyli (na mocy faktu 8.25) w H_{n-1}. □

8.5 System odwrotny $(\widetilde{K}_n)$

Niech $(\widetilde{K}_n, \widetilde{f}_n)$ oraz (K_n, f_n) będą systemami odwrotnymi kompleksów otrzymanymi z twierdzenia 3.2 odpowiednio dla ciągów pokryć $(\mathcal{V}_n)_{n \geq n_1}$ oraz $(\mathcal{U}_{nL})_{n \geq n_1}$, gdzie n_1 oznacza stałą z lematu 8.28. Ciągi te spełniają założenia twierdzenia 3.2, co wynika w pierwszym przypadku z lematu 8.28, zaś w drugim z wniosku 3.22 (ponieważ w (8.7a) wybraliśmy odpowiednio dużą wartość L). Co więcej, z twierdzenia 4.1 wynika, że system (K_n, f_n) zadaje kompakt Markowa z własnością rozdrabniania. W oparciu o tę wiedzę sprawdzimy teraz, że $(\widetilde{K}_n, \widetilde{f}_n)$ zadaje kompakt Markowa z osobliwością, również mający własność rozdrabniania.

8.5.1 Typy i przesunięcia sympleksów

Definicja 8.29. Sympleks $\widetilde{\sigma} = [v_{V_1}, \ldots, v_{V_k}] \in \widetilde{K}_n$ nazwiemy *zwyczajnym*, jeśli zbiory $V_1, \ldots, V_k$ są wszystkie zwyczajne, oraz *nadzwyczajnym* w przeciwnym wypadku.

Definicja 8.30. Niech $n \geq n_1$, $k \in \mathbb{Z}$. Sympleks w $\widetilde{K}_n$ bądź w K_n nazwiemy *k-wewnętrznym*, jeśli jego nośnik jest zawarty w A_k, a przy tym zachodzi $nL \geq |x_0| + (k+1)L$. Zbiór sympleksów k-wewnętrznych w $\widetilde{K}_n$ bądź w K_n oznaczymy odpowiednio przez $\widetilde{K}_n^{(k)}$ oraz $K_n^{(k)}$.

Zauważmy, że:

- dla $k \geq -D$ sympleksami wewnętrznymi w $K_n = N(\widetilde{\mathcal{U}}_{nL})$ są dokładnie te, których wszystkie wierzchołki odpowiadają zbiorom k-wewnętrznym w sensie definicji 8.20;
- dla $k \leq D$ warunek dotyczący głębokości jest trywialny (na mocy (8.9)), zatem dla k-wewnętrzności wystarczy zawieranie nośnika w A_k;
- na mocy faktu 8.25 sympleksy k-wewnętrzne w systemie $(\widetilde{K}_n)$ są zwyczajne.

Fakt 8.31. *Jeśli $\widetilde{s} \in \widetilde{K}_n$ jest zwyczajny, to $\widetilde{s} \in \widetilde{K}_n^{(-n)}$, a ponadto wszystkie sympleksy w $\widetilde{f}_n^{-1}(\widetilde{s})$ również są zwyczajne.*

Dowód. Pierwsza część tezy wynika z definicji. Gdyby zaś pewien sympleks $\widetilde{\sigma}$ w $\widetilde{f}_n^{-1}(\widetilde{s})$ nie był zwyczajny, to z faktu 3.5 mielibyśmy $H_{n+1} \subseteq \operatorname{supp} \widetilde{\sigma} \subseteq \operatorname{supp} \widetilde{s} \subseteq A_{-n}$, co daje sprzeczność z faktem 8.25. $\square$

Definicja 8.32. Dla $m \in \mathbb{Z}$ oraz $\widetilde{\sigma} = [v_{V_1}, \ldots, v_{V_k}] \in \widetilde{K}_n^{(-m)}$, definiujemy

$$g^m \,\square\, \widetilde{\sigma} = [v_{g^m \cdot V_1}, \ldots, v_{g^m \cdot V_k}] \in K_{n+m}^{(0)}.$$

Definicja ta jest poprawna, ponieważ dla $1 \leq i \leq k$ zbiór $U_i = g^n \cdot V_i$ z definicji należy do $\mathcal{U}_{2nL}^{(0)}$, a przy tym z definicji 8.30 i 8.20 wynika, że jest on $\max(0, n-m)$-wewnętrzny. Stąd na mocy faktu 8.21 mamy $g^m \cdot V_i = g^{(m-n)} \cdot U_i \in \widetilde{\mathcal{U}}_{(m+n)L}^{(0)}$. Ponadto zbiory $g^m \cdot V_i$ mają oczywiście niepuste przecięcie, zatem $g^m \,\square\, \widetilde{\sigma}$ istotnie jest sympleksem w $K_{n+m}^{(0)}$.

Uwaga 8.33. Symbol $\square$ wprowadzamy dla uniknięcia kolizji oznaczeń z operacją przesunięcia sympleksu $\gamma \cdot s$ określoną w definicji 4.4. Jest to tym istotniejsze, że poniżej będziemy równolegle używać przesunięć obu rodzajów. Wprawdzie są one określone analogicznym wzorem, jednak wymagają innych założeń (i co za tym idzie, mają inne własności).

Fakt 8.34. *Niech $m_1 \leq m_2$ będą całkowite oraz $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{K}_n^{(-m_1)}$. Wówczas*

$$g^{m_2} \,\square\, \widetilde{\sigma} = g^{m_2 - m_1} \cdot \big(g^{m_1} \,\square\, \widetilde{\sigma}\big).$$

Dowód. Wynika to łatwo z faktu 4.8, zawierania $\operatorname{supp}(g^{m_1} \,\square\, \widetilde{\sigma}) = g^{m_1} \cdot \operatorname{supp} \widetilde{\sigma} \subseteq A_0$ oraz równości typów elementów bazowych x_0, x_m dla zbiorów A_0, A_m (którą stwierdziliśmy w (8.7d)). $\square$

Fakt 8.35. *Jeśli $n \geq n_1$, $0 \leq m \leq \min(\frac{n}{2}, n - n_1)$ oraz $\sigma \in K_n^{(0)}$, to istnieje $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{K}_{n-m}^{(-m)}$ takie, że $g^m \,\square\, \widetilde{\sigma} = \sigma$.*

Dowód. Niech $\sigma = [v_{U_1}, \ldots, v_{U_k}]$, gdzie $U_i \in \mathcal{U}_n^{(0)}$ dla $1 \leq i \leq k$. Ponieważ z założenia mamy $m \geq 0$ oraz $\max\big(m - (n-m), -D\big) \leq 0$, z faktu 8.24 wynika, że zbiór $V_i = g^{-m} \cdot U_i$ należy do $\mathcal{V}_{n-m}$. Przy tym oczywiście V_i mają niepuste przecięcie oraz są zawarte w A_{-m}, zatem sympleks $\widetilde{\sigma} = [v_{V_1}, \ldots, v_{V_k}]$ istnieje i leży w $\widetilde{K}_{n-m}^{(-m)}$. (Przy tym mamy $n - m \geq n_1$). Równość $g^m \,\square\, \widetilde{\sigma} = \sigma$ jest oczywista. $\square$

Definicja 8.36. Dla dowolnego sympleksu zwyczajnego $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{K}_n$ definiujemy jego typ wzorem

$$T(\widetilde{\sigma}) = T(g^m \,\square\, \widetilde{\sigma}) \qquad \text{dla dowolnego } m \text{ takiego, że } \widetilde{\sigma} \in \widetilde{K}_n^{(-m)}.$$

Z faktu 8.34 wynika, że wynik nie zależy od wyboru m.

8.5.2 Dowód własności Markowa (z osobliwością)

Lemat 8.37. *Niech $\widetilde{s} = [v_{V_1}, \ldots, v_{V_k}] \in \widetilde{K}_n$ będzie zwyczajny i niech $s = g^n \,\square\, \widetilde{s} \in K_{2n}$. Wówczas dla każdego $k \geq 0$ odwzorowanie $j_k : (\widetilde{f}_n^{n+k})^{-1}(\widetilde{s}) \to (f_{2n}^{2n+k})^{-1}(s)$, określone wzorem*

$$j_k(\widetilde{\sigma}) = g^n \,\square\, \widetilde{\sigma},$$

jest poprawnie określone, zaś wszystkie j_k tworzą razem typowany izomorfizm $\widetilde{\mathbf{K}}[\widetilde{s}] \simeq \mathbf{K}[s]$.

Dowód. Z faktów 8.31 i 3.5 wynika, że wszystkie sympleksy w rozważanych podkompleksach $(\widetilde{f}_k^{n+k})^{-1}(\widetilde{s})$ są zwyczajne i mają nośniki zawarte w A_{-n}, a więc są $(-n)$-wewnętrzne. Z definicji 8.32 wynika zatem, że wartości odwzorowania j_k są sympleksami w K_{2n+k}. Przy tym j_k w oczywisty sposób zachowuje zawierania pomiędzy sympleksami (w szczególności: zawierania wierzchołków w sympleksach), a na mocy definicji 8.36 również ich typy.

W takim razie do sprawdzenia pozostaje, że j_k przyjmuje wartości w $(f_{2n}^{2n+k})^{-1}(s)$, że jest izomorfizmem, oraz że następujący diagram jest przemienny:

(8.11)
$$\begin{tikzcd}
\widetilde{s} \arrow[d, "j_0"'] & \widetilde{f}_n^{-1}(\widetilde{s}) \arrow[l, "\widetilde{f}_n"'] \arrow[d, "j_1"] & \ldots \arrow[l] & (\widetilde{f}_n^{n+k})^{-1}(\widetilde{s}) \arrow[l] \arrow[d, "j_k"] & (\widetilde{f}_n^{n+k+1})^{-1}(\widetilde{s}) \arrow[l, "\widetilde{f}_{n+k}"'] \arrow[d, "j_{k+1}"] & \ldots \arrow[l] \\
s & f_{2n}^{-1}(s) \arrow[l, "f_{2n}"'] & \ldots \arrow[l] & (f_{2n}^{2n+k})^{-1}(s) \arrow[l] & (f_{2n}^{2n+k+1})^{-1}(s) \arrow[l, "f_{2n+k}"'] & \ldots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Zauważmy, że wystarczy sprawdzić te własności jedynie dla pary j_0, j_1 oraz skrajnego lewego kwadratu w tym diagramie, ponieważ dla dalszych obiektów wynikną one wtedy przez indukcję.

Rozważmy wierzchołki

$$v_{V_0} \in \widetilde{f}_n^{-1}(\widetilde{s}), \qquad j_1(v_{V_0}) = v_{U_0}, \qquad \text{gdzie} \quad U_0 = g^n \cdot V_0.$$

Naszym celem jest wykazanie, że $f_n(v_{U_0})$ należy do s i pokrywa się z $j_0(\widetilde{f}_n(v_{V_0}))$; z definicji odwzorowań f_n, $\widetilde{f}_n$ wynika, że dla obu tych celów wystarczy wykazać równość zbiorów

(8.12)
$$\big\{U \;\big|\; U \in \mathcal{U}_{2nL},\ U_0 \subseteq U\big\} \quad = \quad \big\{g^n \cdot V \;\big|\; V \in \mathcal{V}_n,\ V_0 \subseteq V\big\}.$$

Zawieranie $(\supseteq)$ jest oczywiste. W drugą stronę, jeśli $U \in \mathcal{U}_{2nL}$ zawiera U_0, to $V = g^{-n} \cdot U$ zawiera V_0; pozostaje sprawdzić, czy $V \in \mathcal{V}_n$. Jeśli $U \subseteq A_0$, to jest tak z definicji. W przeciwnym razie mamy $V \in \mathcal{H}_n$, co oznacza, że $V_0 \subseteq V \subseteq H_n$, zatem $\widetilde{f}_n(v_{V_0})$ leży w barycentrum pewnego sympleksu nadzwyczajnego, co przeczy założeniu, że punkt ten należy do $\widetilde{s}$.

Wykazaliśmy więc równość (8.12), skąd wynika równocześnie, że j_1 jest poprawnie określone oraz że skrajny lewy kwadrat w (8.11) jest przemienny. Pozostaje sprawdzić, że j_k jest izomorfizmem dla $k = 0, 1$. Ponieważ przyporządkowanie $v_U \mapsto v_{g^n \cdot U}$ jest z pewnością różnowartościowe, wystarczy udowodnić surjektywność j_k na poziomie sympleksów.

Niech $\sigma = [v_{U_1}, \ldots, v_{U_m}] \in (f_{2n}^{2n+k})^{-1}(s)$. Dla $1 \le i \le m$ mamy $U_i \in \widetilde{\mathcal{U}}_{(2n+k)L}$; ponadto z faktu 3.5

$$U_i \;\subseteq\; \operatorname{supp} \sigma \;\subseteq\; \operatorname{supp} s \;=\; \operatorname{supp}(g^n \,\square\, \widetilde{s}) \;=\; g^n \cdot \operatorname{supp} \widetilde{s} \;\subseteq\; g^n \cdot A_{-n} \;=\; A_0.$$

Określamy $V_i = g^{-n} \cdot U_i$; wówczas z definicji mamy

$$U_i \in \mathcal{U}^{(0)}_{(2n+k)L} \quad\Rightarrow\quad g^k \cdot U_i \in \mathcal{U}^{(0)}_{(2n+2k)L} \quad\Rightarrow\quad V_i = g^{-(n+k)} \cdot \big(g^k \cdot U_i\big) \in \mathcal{V}_{(n+k)}.$$

Przy tym zbiory V_i mają niepuste przecięcie, więc $\widetilde{\sigma} = [v_{V_1}, \ldots, v_{V_m}]$ jest sympleksem w $\widetilde{K}_{n+k}$. Co więcej, z powyższych rachunków wynika, że $\operatorname{supp} \widetilde{\sigma} \subseteq A_{-n}$ (a więc $\widetilde{\sigma}$ jest $(-n)$-wewnętrzny) oraz $g^n \,\square\, \widetilde{\sigma} = \sigma$. Pozostaje więc jedynie sprawdzić, że $\widetilde{\sigma}$ należy do dziedziny j_k, czyli że $\widetilde{\sigma} \in (\widetilde{f}_n^{n+k})^{-1}(\widetilde{s})$.

Niech $\widetilde{s}' \in \widetilde{K}_n$ będzie dowolnym sympleksem zawierającym $\widetilde{f}_n^{n+k}(\widetilde{\sigma})$. Wówczas stosując wykazaną już część lematu (a w szczególności przemienność diagramu (8.11)) dla $\widetilde{s}'$, otrzymujemy w szczególności:

$$g^n \,\square\, \widetilde{f}_n^{n+k}(\widetilde{\sigma}) \;=\; f_{2n}^{2n+k}(g^n \,\square\, \widetilde{\sigma}) \;=\; f_{2n}^{2n+k}(\sigma) \;\subseteq\; s \;=\; g^n \,\square\, \widetilde{s}.$$

Z różnowartościowości przesuwania wierzchołków o g^n mamy $\widetilde{f}_n^{n+k}(\widetilde{\sigma}) \subseteq \widetilde{s}$, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 8.38. *System $(\widetilde{K}_n, \widetilde{f}_n)_{n \ge n_1}$ zadaje na przestrzeni X strukturę kompaktu Markowa z osobliwością w punkcie $x_{-\infty}$.*

Dowód. Dla każdego $n \ge n_1$ jako wyróżniony wierzchołek w kompleksie $\widetilde{K}_n$ wybieramy v_{H_n}; wówczas sympleksy nieosobliwe pokrywają się ze zwyczajnymi. Ponieważ z faktu 8.17 mamy $x_{-\infty} \in B_{-n}$, jedynym elementem $\mathcal{V}_n$ zawierającym $x_{-\infty}$ jest H_n. Na mocy twierdzenia 3.2 oznacza to, że punkt $x_{-\infty} \in X$ odpowiada nici wierzchołków wyróżnionych $(v_{H_n})_{n \ge 0}$.

Ponieważ na mocy lematu 8.28 pokrycia $\mathcal{V}_n$ mają wspólnie ograniczony rząd, kompleksy $\widetilde{K}_n$ mają wspólnie ograniczony wymiar; pozostałe własności sformułowane w punktach (i-ii) definicji 1.9 wynikają wprost z twierdzenia 3.2, z którego otrzymaliśmy system $(\widetilde{K}_n)$.

Przyjmujemy typy sympleksów nieosobliwych wg definicji 8.36. Niech $\widetilde{s} \in \widetilde{K}_n$ i $\widetilde{s}' \in \widetilde{K}_{n'}$ będą sympleksami zwyczajnymi tego samego typu τ. Na mocy lematu 8.37 istnieją sympleksy $s = g^n \,\square\, \widetilde{s} \in K_{2n}$, $s' = g^n \,\square\, \widetilde{s}' \in K_{2n'}$ mające również typ τ oraz typowane izomorfizmy podsystemów: $\widetilde{\mathbf{K}}[\widetilde{s}'] \simeq \mathbf{K}[s']$ i $\widetilde{\mathbf{K}}[\widetilde{s}] \simeq \mathbf{K}[s]$. Ponieważ (K_n, f_n) zadaje kompakt Markowa, stosujemy dla sympleksów s, s' własność (iii) w definicji 1.9, otrzymując typowany izomorfizm $\mathbf{K}[s] \simeq \mathbf{K}[s']$. Łącząc trzy otrzymane izomorfizmy, otrzymujemy $\widetilde{\mathbf{K}}[\widetilde{s}'] \simeq \widetilde{\mathbf{K}}[\widetilde{s}]$, co należało sprawdzić. $\square$

8.5.3 Wsteczna regularność

Fakt 8.39. *Struktura kompaktu Markowa z osobliwością zadana przez system $(\widetilde{K}_n, \widetilde{f}_n)_{n \ge n_1}$ jest wstecznie regularna.*

Dowód. Jako homeomorfizm $\varphi : X \to X$ obieramy działanie elementem g^2. Odwzorowania $\varphi_n : \mathbf{R}_n \to \mathbf{R}_n^{\downarrow}$ również będą intuicyjnie przesunięciami o g^2, jednak ścisła definicja jest nieco bardziej złożona.

Niech $n \geq n_1$ oraz $\widetilde{\sigma}$ leżący w systemie $\mathbf{R}_n$. Wówczas z definicji $\widetilde{\sigma}$ zawiera się w $(\widetilde{f}_n^m)^{-1}(\widetilde{s})$ dla pewnego $m \geq n$ oraz $\widetilde{s} \in Reg(\widetilde{K}_n)$. Wówczas z faktu 8.31 wynika $(-n)$-wewnętrzność sympleksu $\widetilde{s}$, a wobec faktu 3.5 i nierówności $m \geq n$ również sympleksu $\widetilde{\sigma}$. Wobec tego zachodzi $g^n \,\square\, \widetilde{\sigma} \in K_{m+n}^{(0)}$. Ponieważ $m \geq n \geq n_1$, na mocy faktu 8.35 zachodzi

$$g^n \,\square\, \widetilde{\sigma} = g^{n-2} \,\square\, \widetilde{\sigma}' \qquad \text{dla pewnego} \qquad \widetilde{\sigma}' \in \widetilde{K}_{m+2}^{(-(n-2))}.$$

Przy tym $\widetilde{\sigma}'$ jest wyznaczone jednoznacznie, ponieważ przesuwanie sympleksów jest różnowartościowe. Określamy

$$\varphi_n(\widetilde{\sigma}) = \widetilde{\sigma}'.$$

Aby sprawdzić, że φ_n jest typowanym izomorfizmem, wybierzmy dowolny sympleks $\widetilde{s} \in Reg(\widetilde{K}_n)$; wówczas stosując dwukrotnie lemat 8.37 (dla $\widetilde{s}$ oraz $\varphi_n(\widetilde{s})$) otrzymujemy, że typowanym izomorfizmem jest obcięcie φ_n do podsystemu $\widetilde{\mathbf{K}}[\widetilde{s}]$. Zatem łącznie jest nim całe φ_n.

Sprawdźmy, że dla każdego $k \geq n_1$ odwzorowanie graniczne wyznaczone przez φ_k jest zgodne z φ. Niech $(p_n)_{n\geq k}$ będzie dowolną nicią w systemie $\mathbf{R}_k$, wyznaczającą punkt $p \in X$, i niech $\widetilde{s}_n$ będzie pewnym sympleksem w $\widetilde{K}_n$ zawierającym p_n. Wówczas z definicji oraz faktu 3.6 mamy $p \in \widetilde{\pi}_n^{-1} \subseteq \widetilde{\pi}_n^{-1}(\widetilde{s}_n) \subseteq \operatorname{supp} \widetilde{s}_n$, jednak z własności rozdrabniania dla systemu $(\mathcal{V}_n)$ wynika, że przy $n \to \infty$ mamy $\operatorname{diam} \operatorname{supp} \widetilde{s}_n \to 0$, zatem p jest jedynym punktem przecięcia zbiorów $\operatorname{supp} \widetilde{s}_n$. Niech teraz $\widetilde{s}'_n = \varphi_k(\widetilde{s})$; wówczas z definicji łatwo wynika, że $\operatorname{supp} \widetilde{s}'_n = g^2 \cdot \operatorname{supp} \widetilde{s}_n$. Wobec tego mamy

$$\big(\varprojlim \varphi_k\big)(p) \;=\; (\varphi_k(p_n))_{n\geq k} \;\in\; \bigcap_{n=k}^{\infty} \operatorname{supp} \widetilde{s}'_n \;=\; g^2 \cdot \bigcap_{n=k}^{\infty} \operatorname{supp} \widetilde{s}_n \;=\; \{g^2 \cdot p\},$$

co zapewnia, że odwzorowanie graniczne $\varprojlim \varphi_k$ działa zgodnie z φ.

Pozostaje sprawdzić warunek $\varphi_{n+1}(\mathbf{R}_{n+1}) \subseteq \mathbf{R}_n^{\downarrow\downarrow}$ dla $n \geq 0$. Ponieważ wiemy już, że φ_{n+1} jest izomorfizmem, wystarczy sprawdzić go na najwyższym poziomie, to znaczy:

$$\varphi_{n+1}\big(Reg(\widetilde{K}_{n+1})\big) \subseteq (\widetilde{f}_n^{n+2})^{-1}\big(Reg(\widetilde{K}_n)\big). \tag{8.13}$$

Niech $\widetilde{s} \in Reg(\widetilde{K}_{n+1})$. Wówczas z faktu 8.31 mamy $\operatorname{supp} \widetilde{s} \subseteq A_{-(n+1)}$, wobec czego $\operatorname{supp} \varphi_n(\widetilde{s}) \subseteq g^2 \cdot A_{-(n+1)} = A_{-(n-1)}$. Gdyby sympleks $\varphi_n(\widetilde{s})$ nie należał do $\widetilde{f}_n^{n+2})^{-1}\big(Reg(\widetilde{K}_n)\big)$, jego obraz przy $\widetilde{f}_n^{n+2}$ zawierałby się w pewnym sympleksie nadzwyczajnym w $\widetilde{K}_n$, a zatem na mocy faktu 3.5 jego nośnik zawierałby się w gwieździe zbioru $H_n \in \mathcal{V}_n$, która na mocy dowodu lematu 8.28 zawiera się z kolei w $B_{-(n-1)}$. Otrzymujemy więc sprzeczność, która kończy dowód. $\square$

8.6 Własności samopodobieństwa

Niech $(\widetilde{K}_n, \widetilde{f}_n)$ będzie systemem odwrotnym określonym w poprzednich podrozdziałach. Intuicyjnie, naszym celem jest wykazanie *gęstości* pewnego typu sympleksu w tym systemie.

Oznaczmy przez $\widetilde{\pi}_n : X \to \widetilde{K}_n$ naturalne rzutowanie związane z systemem $(\widetilde{K}_n)$.

8.6.1 Podobieństwo między małymi i dużymi podkompleksami

Lemat 8.40. *Niech E_1, E_2 będą dowolnymi niepustymi podzbiorami otwartymi X, przy czym $x_* \in E_1$. Wówczas istnieją $m_1, m_2 \geq 0$ oraz podkompleksy $Q_1 \subseteq \widetilde{K}_{m_1}$, $Q_2 \subseteq \widetilde{K}_{m_2}$ takie, że:*

$$\widetilde{\pi}_{m_1}^{-1}(Q_1) \supseteq X \setminus E_1, \qquad \widetilde{\pi}_{m_2}^{-1}(Q_2) \subseteq E_2, \qquad \widetilde{\mathbf{K}}[Q_1] \simeq \widetilde{\mathbf{K}}[Q_2], \tag{8.14}$$

gdzie $\simeq$ oznacza typowany izomorfizm systemów odwrotnych. Co więcej, rozważany izomorfizm $\widetilde{\mathbf{K}}[Q_1] \simeq \widetilde{\mathbf{K}}[Q_2]$ jest zadany przez przesunięcie wszystkich wierzchołków w kompleksach o ustalony element $\gamma \in G$ (tzn. przeprowadza wierzchołek postaci v_V na $v_{\gamma \cdot V}$).

Uwaga 8.41. Zwracamy uwagę na użycie przeciwnych inkluzji w pierwszych dwóch częściach warunku (8.14). Oznacza to intuicyjnie, że "dowolnie mała" część kompaktu $\varprojlim \widetilde{K}_n$ jest podobna do "dowolnie dużej" (pod warunkiem ominięcia punktu osobliwego).

Dowód. **1.** Ponieważ E_1 jest otwarty, z faktu 8.17 wynika, że dla pewnego $m_1 \geq n_1$ zachodzi $B_{-(m_1-2)} \subseteq E_1$. Określamy Q_1 jako podkompleks złożony ze wszystkich sympleksów zwyczajnych w $\widetilde{K}_{m_1}$. Wówczas na mocy faktów 3.6 i 8.25 mamy

$$\widetilde{\pi}_{m_1}^{-1}(Q_1) \;\supseteq\; X \setminus \widetilde{\pi}_{m_1}^{-1}\big(\overline{\widetilde{K}_{m_1} \setminus Q_1}\big) \;\supseteq\; X \Bigg\backslash \bigcup_{\substack{\widetilde{s} \in \widetilde{K}_{m_1} \\ \text{nadzwyczajny}}} \operatorname{supp} \widetilde{s} \;\overset{(*)}{\supseteq}\; X \setminus H_{m_1-1} \;\supseteq\; A_{-(m_1-2)} \;\supseteq\; X \setminus E_1,$$

przy czym zawieranie oznaczone gwiazdką wynika stąd, że nośnik dowolnego sympleksu nadzwyczajnego w $\widetilde{K}_{m_1}$ z definicji zawiera się w gwieździe zbioru H_{m_1} w pokryciu $\mathcal{V}_{m_1}$, która (jak wynika z dowodu lematu 8.28) zawiera się w H_{m_1-1}.

Ponieważ wszystkie sympleksy w Q_1 są zwyczajne, stosując do nich zbiorczo lemat 8.37 otrzymujemy $\widetilde{\mathbf{K}}[Q_1] \simeq \mathbf{K}[Q]$, gdzie Q jest pewnym podkompleksem w K_{2m_1}, zadany wzorem $I(\widetilde{s}) = g^{m_1} \,\square\, \widetilde{s}$ dla dowolnego $\widetilde{s} \in Q_1$. Przy tym skoro na mocy faktu 8.31 wszystkie sympleksy w Q_1 są $(-m_1)$-wewnętrzne, to wszystkie sympleksy w Q muszą być 0-wewnętrzne.

2. Aby określić podkompleks Q_2, przypomnijmy najpierw wybrane oznaczenia z rozdziału 8.3 i ich własności:

$$A_0 = U_{x_0}, \qquad T(x_0) = \tau_m, \qquad d = NWD(\mathbb{L}), \qquad d \,|\, L.$$

Skorzystamy też z faktu, że $n_1 \geq |x_0| + L$ (o co zadbaliśmy w rozdziale 8.4), zaś L przekracza stałą skoku J systemu $(\mathcal{U}_n)$ (na mocy (8.7a)).

Ponieważ ciąg $(\mathcal{V}_n)_{n \geq n_1}$ ma własność rozdrabniania, dla pewnego $b \geq n_1$ istnieje zbiór $V \in \mathcal{V}_b$ zawarty w E_2; co więcej, możemy założyć, że $V \neq H_b$. Wówczas z definicji $\mathcal{V}_b$, a następnie z faktu 8.14 wynika, że istnieją $x, y \in G$ oraz $l \geq 0$ takie, że

$$V = g^{-b} \cdot U_x, \qquad U_x \in \mathcal{U}^{(0)}_{2bL}, \qquad\qquad U_y \subseteq U_x, \qquad U_y \in \mathcal{U}^{(0)}_{2bL+l}, \qquad T(y) = \tau_m.$$

Skoro $U_y \subseteq A_0 = U_{x_0}$ oraz $T(U_y) = T(U_{x_0}) = \tau_m$, liczba $2bL + l - |x_0|$ należy do $\mathbb{L}$, a więc jest wielokrotnością d. Zatem d jest dzielnikiem zarówno L, jak też $l - |x_0|$. Wobec tego na mocy faktu 8.16 zbiór $\mathbb{L}$ zawiera element postaci $cL + |x_0| - l$ dla pewnego $c \geq 0$, a więc istnieje $z \in G$, dla którego

$$U_z \subseteq U_y \subseteq g^b \cdot E_2, \qquad U_z \in \mathcal{U}^{(0)}_{(2b+c)L+|x_0|}, \qquad T(z) = \tau_m.$$

W dalszej części dowodu sprawdzimy, że kompleks Q można przy pomocy elementu z przesunąć "do wewnątrz" zbioru $g^b \cdot E_2$, a następnie (przy pomocy operacji odwrotnej do $\square$) "do wewnątrz" samego E_2.

3. Niech s będzie dowolnym sympleksem w Q. Ponieważ $T(z) = T(x_0)$ oraz $U_{x_0} = A_0 \supseteq \operatorname{supp} s$ (przy czym różnica głębokości między s a U_{x_0} wynosi $2m_1L - |x_0| \geq J$), z faktu 4.8 wynika, że

$$s' \ := \ zx_0^{-1} \cdot s_0 \ \in \ N(\widetilde{\mathcal{U}}_{(2m_1+2b+c)L}) \ = \ K_{2m_1+2b+c}.$$

(W szczególności dowiadujemy się, że takie przesunięcie istnieje). Przy tym mamy oczywiście

$$\operatorname{supp} s' \ = \ zx_0^{-1} \cdot \operatorname{supp} s \ \subseteq \ U_z \ \subseteq \ U_x, \qquad\qquad T^\Delta(s') = T^\Delta(s).$$

Stosując lemat 4.10 zbiorczo dla wszystkich s (oraz indukcyjnie dla ich przeciwobrazów przy odwzorowaniach $f_{2m_1}^{2m_1+k}$ dla $k \geq 0$), otrzymujemy $\mathbf{K}[Q] \simeq \mathbf{K}[Q']$ dla pewnego podkompleksu $Q' \subseteq K_{2m_1+2b+c}$. Ponieważ $U_x \subseteq A_0$, wszystkie sympleksy w Q' mają nośniki zawarte w A_0, a więc są 0-wewnętrzne.

4. Niech teraz s' będzie dowolnym sympleksem w Q'. Ponieważ $m_1 \geq n_1$, mamy $\frac{2m_1+2b+c-n_1}{2} \geq b$, a więc na mocy faktu 8.35 zachodzi $s' = g^b \,\square\, \widetilde{s}'$ dla pewnego $\widetilde{s}' \in \widetilde{K}_{2m_1+b+c}$. Ponadto tym z faktu 3.6 mamy

$$\widetilde{\pi}_{2m_1+b+c}^{-1}(\widetilde{s}') \ \subseteq \ \operatorname{supp} \widetilde{s}' \ = \ g^{-b} \cdot \operatorname{supp} s' \ \subseteq \ g^{-b} \cdot U_x \ = \ V \ \subseteq \ E_2. \tag{8.15}$$

Stosując zbiorczo lemat 8.37 dla wszystkich s', otrzymujemy $\mathbf{K}[Q'] \simeq \widetilde{\mathbf{K}}[\widetilde{Q}']$ dla pewnego podkompleksu $\widetilde{Q}' \subseteq \widetilde{K}_{2m_1+b+c}$. Przy tym z (8.15) wynika, że $\widetilde{\pi}_{2m_1+b+c}^{-1}(\widetilde{Q}') \subseteq E_2$.

5. Przyjmując $Q_2 = \widetilde{Q}'$ oraz $m_2 = 2m_1 + b + c$, mamy z poprzednich punktów

$$\widetilde{\mathbf{K}}[Q_1] \simeq \mathbf{K}[Q] \simeq \mathbf{K}[Q'] \simeq \widetilde{\mathbf{K}}[Q_2],$$

przy czym przed chwilą sprawdziliśmy, że $\widetilde{\pi}_{m_2}^{-1}(Q_2) \subseteq E_2$. Zauważmy też, że każdy z powyższych trzech izomorfizmów został w istocie zdefiniowany poprzez przesuwanie wierzchołków w kompleksach (ściślej: odpowiadających im zbiorów z rodzin $\mathcal{U}$ tudzież $\mathcal{V}$) o ustalony element grupy G, zatem tę samą własność musi mieć ich złożenie. To kończy dowód. □

8.6.2 Gęste typy sympleksów

Definicja 8.42. Niech $\widetilde{s}_i$ będzie sympleksem w $\widetilde{K}_{m_i}$, przy czym $m_i \geq n_1$ dla $i \geq 0$ oraz $m_i \to \infty$ przy $i \to \infty$. Powiemy, że ciąg $(\widetilde{s}_i)$ jest *zbieżny* do $p \in X$, jeśli dla pewnych $p_i \in \widetilde{\pi}_{m_i}^{-1}(\widetilde{s}_i)$ zachodzi $p_i \to p$.

Jeśli rodzina sympleksów $\Sigma \subseteq \bigcup K_n$ zawiera ciąg zbieżny do p, powiemy, że p jest *punktem skupienia* Σ.

Uwaga 8.43. W powyższej definicji wyrażenie "pewnych p_i" można równoważnie zastąpić przez "każdych p_i"; prócz tego warunek $p_i \in \widetilde{\pi}_{m_i}^{-1}(\widetilde{s}_i)$ można równoważnie zastąpić przez $p_i \in \operatorname{supp} \widetilde{s}_i$. Oba te spostrzeżenia (dające łącznie cztery równoważne wersje definicji 8.42) wynikają stąd, że z faktu 3.6 oraz własności rozdrabniania dla systemu $(\mathcal{V}_n)$ mamy $\operatorname{diam} \widetilde{\pi}_{m_i}^{-1}(\widetilde{s}_i) \leq \operatorname{diam} \operatorname{supp} \widetilde{s}_i \to 0$ przy $i \to \infty$.

Fakt 8.44. *Jeśli Q jest podkompleksem w $\widetilde{K}_n$, to punkty skupienia sympleksów z $\widetilde{\mathbf{K}}[Q]$ należą do $\widetilde{\pi}_n^{-1}(Q)$.*

Dowód. Niech $\widetilde{s}_i$ będzie sympleksem w $(\widetilde{f}_n^{m_i})^{-1}(Q)$ i niech p będzie granicą ciągu punktów $p_i \in \widetilde{\pi}_{m_i}^{-1}(\widetilde{s}_i)$. Wówczas domknięty zbiór $\widetilde{\pi}_n^{-1}(Q)$ zawiera wszystkie punkty p_i, zatem zawiera również p. □

Definicja 8.45. Typ sympleksu τ nazwiemy *zwyczajnym*, jeśli rodzina wszystkich sympleksów typu τ w systemie $\widetilde{\mathbf{K}}$ ma punkt skupienia różny od x_*.

Uwaga 8.46. Ponieważ liczba typów jest skończona, każdy element X jest punktem skupienia dla sympleksów pewnego typu τ. Wynika stąd w szczególności, że istnieją typy zwyczajne.

Lemat 8.47. *Dla dowolnego zwyczajnego typu τ sympleksy typu τ są gęste w X (to znaczy: dowolny punkt $p \in X$ jest punktem skupienia rodziny wszystkich sympleksów typu τ w $\widetilde{\mathbf{K}}$).*

Dowód. Niech τ będzie typem zwyczajnym i niech sympleksy $\widetilde{s}_i \in \widetilde{K}_{k_i}$ zbiegają do punktu $p \in X \setminus \{x_*\}$. Oznaczmy $d(p, x_*) = \varepsilon$ oraz $E_1 = B(x_*, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq X$. Wówczas

$$\widetilde{\pi}_{k_i}^{-1}(\widetilde{s}_i) \cap E_1 = \emptyset \qquad \text{dla dostatecznie dużych } i. \tag{8.16}$$

Niech E_2 będzie dowolnym niepustym podzbiorem otwartym X i niech $I : \widetilde{\mathbf{K}}[Q_1] \to \widetilde{\mathbf{K}}[Q_2]$ będzie typowanym izomorfizmem otrzymanym z lematu 8.40 dla zbiorów E_1, E_2, przy czym $Q_i \subseteq \widetilde{K}_{k_i}$. Wówczas z (8.16) wynika, że dla i większych od pewnego i_0 zachodzi

$$\widetilde{s}_i \subseteq \widetilde{\pi}_{k_i}(X \setminus E_1) \subseteq (\widetilde{f}_{m_1}^{k_i})^{-1}(Q_1) \qquad \Rightarrow \qquad \widetilde{s}_i \in \widetilde{\mathbf{K}}[Q_1].$$

Niech $\gamma \in G$ będzie elementem takim, że $I(v_V) = v_{\gamma \cdot V}$ dla dowolnego $v_V \in \widetilde{\mathbf{K}}[Q_1]$, i niech $p_i \in \operatorname{supp} \widetilde{s}_i$ będzie pewnym ciągiem zbieżnym do p. Wówczas dla $i \geq i_0$ mamy

$$\operatorname{supp} I(\widetilde{s}_i) \ \ni \ \gamma \cdot p_i \ \to \ \gamma \cdot p,$$

co na mocy uwagi 8.43 zapewnia, że sympleksy $I(\widetilde{s}_i)$ są zbieżne do pewnego punktu (równego $\gamma \cdot p$, lecz nie jest to istotne), który musi należeć do $\widetilde{\pi}_{m_2}^{-1}(Q_2) \subseteq E_2$ na mocy faktu 8.44. Ponieważ I jest izomorfizmem typowanym, wynika stąd, że E_2 zawiera punkt skupienia sympleksów typu τ. Z dowolności E_2 wynika, że zbiór wszystkich takich punktów skupienia jest gęsty w X.

Dla ukończenia dowodu pozostaje przeprowadzić proste rozumowanie przekątniowe. Niech $p \in X$ będzie granicą ciągu punktów $(p_j)_{j \geq 0}$, z których każdy jest granicą ciągu punktów $p_{j,i} \in \widetilde{\pi}_{m_{j,i}}^{-1}(\widetilde{s}_{j,i})$ przy $i \to \infty$, gdzie $\widetilde{s}_{j,i}$ jest sympleksem w $\widetilde{K}_{m_{j,i}}$. Wówczas dla dowolnego j istnieje i_j takie, że równocześnie zachodzi $d(p_j, p_{j,i}) < \frac{1}{j}$ oraz $m_{j,i} > j$, a wtedy ciąg sympleksów $(s_{j,i_j})_{j \geq 0}$ zbiega do p, o czym świadczą odpowiednie punkty p_{j,i_j}. Oznacza to, że zbiór punktów skupienia dowolnej rodziny sympleksów jest domknięty w X, co kończy dowód. $\square$

Bibliografia

[1] J. W. Cannon. The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups. *Geometriae Dedicata*, 16(2):123–148, 1984.

[2] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes: les groupes hyperboliques de Gromov*. Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1990.

[3] M. Coornaert and A. Papadopoulos. *Symbolic dynamics and hyperbolic groups*. Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1993.

[4] A. N. Dranishnikov. Cohomological dimension of markov compacta. *Topology and its Applications*, 154(7):1341 – 1358, 2007. Special Issue: The Third Joint Meeting Japan-Mexico in Topology and its Applications.

[5] R. Engelking. *General topology*. Monografie matematyczne. PWN, 1977.

[6] R. Engelking. *Dimension Theory*. Mathematical Studies. North-Holland Publishing Company, 1978.

[7] I. Kapovich and N. Benakli. *Boundaries of hyperbolic groups*, pages 39–93. Contemporary mathematics - American Mathematical Society. American Mathematical Society, 2002.

[8] M. Kapovich. Problems on boundaries of groups and kleinian groups. *preprint*, 2008.

[9] J. Świątkowski. Trees of manifolds as boundaries of spaces and groups. *preprint arXiv:1304.5067*, 2013.

[10] J. Świątkowski. Trees of metric compacta and trees of manifolds. *preprint arXiv:1304.5064*, 2013.