Prof. dr hab. Jacek Świątkowski
Instytut Matematyczny UWr

Wrocław, 10 stycznia 2011 r.

AUTOREFERAT NA TEMAT OSIĄGNIĘĆ DOTYCZĄCYCH NIEDODATNIEJ KRZYWIZNY SYMPLICJALNEJ

Moje prace dotyczące niedodatniej krzywizny symplicjalnej:

[1] T. Januszkiewicz, J. Świątkowski, *Simplicial nonpositive curvarure*, Publications Mathematiques IHES 104 (2006), 1–85.

[2] J. Świątkowski, *Regular path systems and (bi)automatic groups*, Geometriae Dedicata 118 (2006), 23-48.

[3] T. Januszkiewicz, J. Świątkowski, *Filling invariants in systolic complexes and groups*, Geometry & Topology 11 (2007), 727–758.

[4] F. Haglund, J. Świątkowski, *Separating quasi-convex subgroups in 7-systolic groups*, Groups, Geometry & Dynamics 2 (2008), 223–244.

[5] G.Arzhantseva, M.Bridson, I.Leary, A.Minasyan T.Januszkiewicz and J.Świątkowski, *Infinite groups with fixed point properties*, Geometry and Topology 13 (2009), 1229–1264.

[6] J. Świątkowski, *Fundamental pro-groups and Gromov boundaries of 7-systolic groups,* Journal of the London Mathematical Society 80 (2009), 649–664.

[7] T. Januszkiewicz, J. Świątkowski, *Nonpositively curved developments of billiards*, Journal of Topology 3 (2010), 63–80.

Opis osiągnięć

Główną dziedziną mojej pracy naukowej, której dotyczył w szczególności mój doktorat i habilitacja, jest geometryczna teoria grup.

Geometryczna teoria grup zajmuje się badaniem (najczęściej dyskretnych i nieskończonych) grup z punktu widzenia geometrii, bądź to traktując je jak obiekty geometryczne, bądź biorąc pod uwagę ich działanie jako grup symetrii (izometrii, automorfizmów) pewnych przestrzeni. Dziedzina ta znajduje się na styku kombinatorycznej teorii grup, geometrii riemannowskiej, topologii geometrycznej i innych działów matematyki, czerpiąc z nich problematykę i motywacje. Intensywne badania w ostatnich kilkunastu latach inspirowane były w dużej mierze przełomowymi pracami M. Gromova. Dotyczą one m.in. badania geometrycznych własności rozmaitych klas grup, konstruowania geometrycznych niezmienników, rozstrzygania istnienia oraz klasyfikowania grup o określonych geometrycznych własnościach. Dziedzina jest ciągle dość młoda, więc wiele podstawowych pytań pozostaje otwartymi.

Moje badania w tej dziedzinie dotyczą zwłaszcza grup działających na kombinatorycznych kompleksach (symplicjalnych, kostkowych, wielościennych, budynkach Titsa, itp.), szczególnie w obecności założenia o niedodatniej krzywiźnie kompleksu. W okresie po habilitacji badania te koncentrują się na geometrycznych własnościach grup w wymiarze (asymptotycznym lub kohomologicznym) powyżej 2, w szczególności na wyróżnionej przeze mnie (wspólnie z T. Januszkiewiczem) klasie grup związanych z pojęciem niedodatniej krzywizny symplicjalnej - tzw. *grup systolicznych.*

W poniższym opisie numeracja moich prac, od [1] do [7], jest zgodna z załączonym powyżej spisem. Pozostałe wymienione prace oznaczone są symbolami literowymi i nie są jeszcze opublikowane, bądź są to prace innych autorów - ich spis jest zamieszczony na końcu autoreferatu.

A. Teoria krzywizny symplicjalnej, konstrukcje grup związanych z tym pojęciem oraz ich podstawowe własności.

We wspólnej z T. Januszkiewiczem bardzo obszernej pracy [1] wprowadziliśmy do geometrycznej teorii grup nowe pojęcie *krzywizny symplicjalnej.* Pojęcie to dotyczy naturalnych kombinatorycznych warunków zwanych *k-systolicznością* (gdzie $k \geq 6$ jest całkowitym parametrem, zaś podstawowe znaczenie ma przypadek $k = 6$). Są one odpowiednikami warunków ograniczających krzywiznę od góry (a więc warunków typu niedodatniej bądź ujemnej krzywizny). Warunki te dotyczą kompleksów dowolnego wymiaru, zaś w wymiarze 2 pokrywają się z niedodatnią (dla $k = 6$) bądź z ujemną (dla $k \geq 7$) krzywizną. W wyższych wymiarach warunki te nie mają tak bezpośredniego związku z krzywizną metryczną i raczej stanowią pewien niezależny, czysto kombinatoryczny fenomen o konsekwencjach zbliżonych do metrycznej niedodatniej bądź ujemnej krzywizny. Wraz z podanymi przez nas konstrukcjami, pojęcie to daje nową bogatą rodzinę przykładów przestrzeni i grup, i pozwoliło rozwiązać szereg otwartych problemów w geometrycznej teorii grup. Oto wyniki dotyczące podstawowych własności i konstrukcji grup i kompleksów systolicznych.

W pracy [1] pokazaliśmy że kompleksy 6-systoliczne są asferyczne, zaś 6-systoliczne kompleksy grup są rozwijalne (co pozwala stosować technikę kompleksów grup do konstrukcji 6-systolicznych kompleksów). Rozwinęliśmy kombinatoryczną teorię wypukłości oraz geodezyjnych w kompleksach 6-systolicznych. Udowodniliśmy że 7-systoliczne kompleksy są hiperboliczne w sensie Gromova. Pokazaliśmy, że grupy automorfizmów kompleksów 6-systolicznych są biautomatyczne, co implikuje cały szereg ich własności analogicznych do własności grup izometrii przestrzeni o niedodatniej krzywiźnie. Wyniki te pozwalają na stosowanie krzywizny symplicjalnej jako narzędzia w geometrycznej teorii grup nie mniej dogodnego niż klasyczna krzywizna metryczna.

Uogólniając techniki konstrukcyjne z pracy [14] opisaliśmy w [1] sposoby konstruowania kompleksów k-systolicznych, dla dowolnego $k \geq 6$ i o dowolnie dużym wymiarze kohomologicznym, np. k-systolicznych pseudorozmaitości symplicjalnych dowolnie dużego wymiaru.

W tej samej pracy [1] zbadaliśmy związek warunków k-systoliczności z klasycznymi metrycznymi warunkami krzywiznowymi. Pokazaliśmy, że dla dostatecznie dużych k niedodatnia bądź ujemna krzywizna metryczna jest konsekwencją k-systoliczności. Wraz z metodami konstrukcji wspomnianymi wyżej pozwoliło to m. in. rozstrzygnąć otwarty problem istnienia ujemnie zakrzywionych zamknieętych pseudorozmaitości symplicjalnych dowolnie dużego wymiaru zbudowanych z jednakowych regularnych hiperbolicznych sympleksów.

W pracy [2] opisałem nową metodę dowodzenia własności biautomatyczności, dla grup automorfizmów kombinatorycznych kompleksów. Biautomatyczność, to pewna własność typu algorytmicznego, mająca wiele geometrycznych konsekwencji, intensywnie badana od czasu wprowadzenia jej w obszar geometrycznej teorii grup, na początku lat 90-tych, głównie przez W. Thurstona. Wprowadzona przeze mnie metoda jest szczególnie wartościowa w odniesieniu do grup działających z nietrywialnymi stabilizatorami, gdyż wcześniej znane techniki często nie radziły sobie z tym przypadkiem. Metoda pozwoliła wywnioskować biautomatyczność dla szerokiej klasy grup działających geometrycznie na: kompleksach kostkowych, budynkach Titsa, a także na symplicjalnych komplekasach 6-systolicznych omówionych powyżej, w dowolnych wymiarach.

We wspólnej z F. Haglundem pracy [4] udowodniliśmy własność separowalności dla quasi-wypukłych podgrup w dużej naturalnej klasie grup automorfizmów kompleksów 7-systolicznych. Własność ta, hipotetycznie spełniana przez wszystkie grupy hiperboliczne, została dotąd wyprowadzona tylko dla niewielu raczej specjalnych klas takich grup. W naszej pracy dowodzimy jej posługując się całym wachlarzem geometrycznych metod związanych z krzywizną symplicjalną. W moim odczuciu praca ta stanowi test zaawansowania rozwoju technik krzywizny symplicjalnej, w konfrontacji z trudnymi otwartymi problemami głównego nurtu geometrycznej teorii grup.

Problematyce krzywizny symplicjalnej poświęcone są też prace [P1] i [P2] stanowiące napisaną pod moim kierunkiem i obronioną w roku 2008 rozprawę doktorską Piotra Przytyckiego. Pierwsza z nich zawiera rezultat dotyczący istnienia punktów stałych dla skończonych grup automorfizmów kompleksów o niedodatniej krzywiźnie symplicjalnej (czyli 6-systolicznych). W drugiej, rezultat ten jest rozszerzony o analizę własności zbiorów punktów stałych, co owocuje twierdzeniem mówiącym, że kompleksy systoliczne są przestrzeniami klasyfikującymi względem rodzin skończonych podgrup dla grup systolicznych działających w sposób geometryczny na tych kompleksach.

Z udziałem mojej inspiracji powstały również napisane przez Tomasza Elsnera prace [E1] i [E2], w których rozwinął on teorię płaskich powierzchni minimalnych (flatów) w kompleksach systolicznych, dowiódł odpowiednika twierdzenia o płaskim torusie dla grup systolicznych, a także wyprowadził analogon teorii izolowanych flatów wg Hruski dla kompleksów i grup systolicznych. Za rozprawę doktorską zawierającą te rezultaty Tomasz Elsner otrzymał w roku 2009 międzynarodową nagrodę im. Stefana Banacha Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Również w wyniku mojej inspiracji Damian Osajda wspólnie z Piotrem Przytyckim, w obszernej pracy [OP], podali konstrukcję brzegu idealnego w sensie Bestviny dla przestrzeni i grup 6-systolicznych. Wraz z pewnymi dodatkowymi faktami z rozprawy doktorskiej P. Przytyckiego pozwoliło im to dowieść hipotezy Novikova dla grup 6-systolicznych.

W sumie, zainicjowanie teorii krzywizny symplicjalnej zaowocowało rozległymi badaniami wielu matematyków z Polski i z zagranicy. W chwili obecnej opublikowanych jest ponad 20 prac dotyczących tej problematyki. Dziedzina cieszy sie zncznym zainteresowaniem, czego przejawem może być fakt zaproszenia mnie do wygłoszenia cykli wykładów na konferencjach i warsztatach poświęconych tej problematyce, w Montrealu w roku 2006, na międzynarodowych warsztatach w Będlewie w roku 2007, oraz podczas semestru z geometrycznej teorii grup na uniwersytecie stanowym w Columbus w USA w maju 2011 roku.

Ponadto, na Międzynarodowym Kongresie Martematycznym w Hyderabadzie w roku 2010 Tadeusz Januszkiewicz, współautor zasadniczej pracy [1] wprowadzającej pojecie niedodatniej krzywizny symplicjalnej, oraz kilku innych prac z tej dziedziny, wygłosił wykład plenarny poświęcony tej teorii.

B. Egzotyczne wysokowymiarowe zjawiska związane z krzywizną symplicjalną.

Grupy systoliczne wysokiego wymiaru, których istnienie gwarantuje konstrukcja z pracy [1], wydają się być bardzo różne od grup rozważanych dotychczas w geometrycznej teorii grup. Badanie takich nieoczekiwanych własności grup systolicznych stanowiło ważny wątek mojej aktywności naukowej w ostatnich latach. Ich efektem były następujące rezultaty.

We wspólnej z T. Januszkiewiczem pracy [3] pokazaliśmy, że grupy i kompleksy 6-systoliczne spełniają wyizolowany przez nas warunek *asymptotycznej dziedzicznej asferyczności*. Ta własność pozwoliła wykluczyć możliwość posiadania przez grupy 6-systoliczne podgrup izomorficznych z grupami podstawowymi rozmaitości riemannowskich o niedodatniej krzywiźnie i o wymiarze większym niż 2. Tym samym, hiperboliczne grupy systoliczne okazały się przeczyć pewnym hipotezom stawianym przez M. Gromova i dotyczącym restrykcyjnej postaci dla grup hiperbolicznych w wysokich wymiarach.

W pracy [6] opisałem, w języku teorii kształtu, pewną topologiczną własnośc przestrzeni zwaną *pro-*π_1*-injektywnością*. Wykazałem też, że brzegi Gromova grup 7-systolicznych są pro-π_1-injektywne. Własność ta wyklucza np. możliwość zanurzenia w przestrzeni 2-wymiarowego dysku, co jest dość egzotyczne dla przestrzeni o wysokim wymiarze topologicznym, a takimi są brzegi wyżej wspomnianych grup. W wymiarach powyżej 2 nie były dotąd znane grupy hiperboliczne o tak egzotycznych własnościach brzegu Gromova. Tym niemniej, nie jest wykluczone że taka własność brzegu Gromova okaże się w wysokich wymiarach generyczna.

Egzotycznej postaci brzegów Gromova grup systolicznych poświęcona była także napisana pod moim kierunkiem, i obroniona w roku 2009, rozprawa doktorska Pawła Zawiślaka [Z]. W rozprawie tej autor dowodzi, że brzeg Gromova dowolnej 7-systolicznej grupy związanej z orientowalną 3-wymiarową pseudorozmaitością jest homeomorficzny z jednorodną, ale dosyć patologiczną przestrzenią topologiczną znaną jako *sfera Pontriagina*.

Własność asymptotycznej dziedzicznej asferyczności grup, wspomniana trzy akapity wcześniej, wydaje się bardzo interesująca, i stała się przedmiotem dalszych badań w grupie wrocławskich geometrów. W pracy [Zu] moja doktorantka Joanna Zubik udowodniła, że wszystkie grupy o asymptotycznym wymiarze 1 są asymptotycznie dziedzicznie asferyczne. Wszczęła też przewód doktorski i redaguje rozprawę, w której rozstrzyga problem zachowania własności asymptotycznej dziedzicznej asferyczności względem operacji amalgamacji grup (produkt wolny z amalgamacją oraz HNN-rozszerzenie).

We redagowanej wspólnej pracy z Damianem Osajdą [OsS] podajemy pewne użyteczne kryterium dowodzenia asymptotycznej dziedzicznej asferyczności. Wykorzystujemy to kryterium do wykazania tej własności dla całego szeregu grup 2-wymiarowych (np. grupy małych skreśleń, grupy losowe, grupy węzłów), oraz dla pewnych grup *słabo systolicznych* związanych z badnami D. Osajdy dotyczącymi uogólnień pojęcia krzywizny kombinatorycznej na szerszą klasę kompleksów niż symplicjalne. W tej samej pracy pokazujemy też, brzegi Bestviny (uogólniające pojęcie brzegu Gromova na szerszą niż hiperboliczne klasę grup) rozmaitych klas grup asymptotycznie dziedzicznie asferycznych nie dopuszczają zanurzeń 2-dysków. Tym samym, dzielą one tą własność z brzegami Gromova grup 7-systolicznych, dla których wynika ona z rezultatów pracy [6].

C. Zastosowania teorii krzywizny symplicjalnej do rowiązywania otwartych problemów w innych działach geometrii i topologii.

Od samego początku stworzenia teorii krzywizny symplicjalnej, oraz opisania związanych z nią konstrukcji nawych grup, mieliśmy wrażenie, że przełamana została w ten sposób pewna istotna bariera poznawcza, czego konsekwencją powinna być możliwość rozwiązania rozmaitych od lat otwartych problemów. Wrażenie to w znacznym stopniu potwierdziło się rozmaitymi uzyskanymi od tamtej pory rezultatami, głównie w moich wspólnych pracach z Tadeuszem Januszkiewiczem. Oto opis tego rodzaju rezultatów.

W pracy [5] (wspólnej z G. Arzhantsevą, M. Bridsonem, T. Januszkiewiczem, I. Leary'm oraz A. Minasyanem) odpowiadamy pozytywnie na pytanie P. Krophollera o istnienie przeliczalnej nieskończonej grupy G której każde działanie na skończenie wymiarowym ściągalnym CW-kompleksie ma globalny punkt stały. Techniki konstrukcyjne wypracowane w teorii symplicjalnej krzywizny, wzmocnione metodami z teorii grup relatywnie hiperbolicznych, pozwoliły na skonstruowanie jawnych przykładów takich grup. W istocie, grupy skonstruowane w tej pracy posiadają jeszcze mocniejsze własności punktu stałego. W ostatnich latach, juz po ogłoszeniu naszego rezultatu z pracy [5], ukazały się liczne prace dotyczące istnienia grup z silnymi własnościami punktu stałego, m.in. takich autorów jak Chatterji, Kassabov, Farb, Fischer, Silbermann i Weinberger. Prace te zawierają jednak rezultaty dotyczące wyłacznie działań na rozmaitościach bądź przestrzeniach z metrykami $CAT(0)$, a zawarte w nich metody, zupełnie różne od naszych, nie pozwalają na rozszerzenie rezultatów na dowolne CW-kompleksy.

We wspólnej z T. Januszkiewiczem pracy [7] rozwiązaliśmy technikami krzywizny symplicjalnej otwarty problem konstrukcji nidodatnio oraz ujemnie zakrzywionych rozwinięć dla wielościennych bilardów euklidesowych oraz hiperbolicznych. Jest to odpowiedź na pytanie D. Buragi o istnienie w dowolnym wymiarze niedodatnio zakrzywionych rozwinięć wielościennych bilardów, nawet dla przypadku regularnych euklidesowych sympleksów. Pytanie zostało postawione na Kongresie Matematycznym w Berlinie (D. Burago, *Hard ball gas and Alexandrov spaces of curvature bounded above*, Doc. Math. Extra Vol. ICM II (1998), str. 292). Pozytywna odpowiedź dla sympleksów zawarta jest w Theorem J z pracy [1]. Wcześniej odpowiedź na to pytanie była znana jedynie dla sympleksów w wymiarach 2 i 3. W pracy [7] rezultat ten został rozszerzony na obszerną klasę bilardów zawierających w szczególności wszystkie euklidesowe i hiperboliczne wielościany wypukłe, w dowolnych wymiarach. Wcześniej, tego typu rezultaty w wymiarze 3 były dowiedzione m.in. przez D. Burago i B. Kleinera.

Oprócz właśnie omówionych dwóch prac, także wcześniej wspomniane prace dotyczące symplicjalnej krzywizny zawierają szereg rozwiązań otwartych problemów z geometrycznej teorii grup. Oto niektóre z nich:

- Pytanie I. Leary'ego (zapisane jako Question 1.24 na cenionej w środowisku badaczy liście M. Bestviny otwartych problemów w geometrycznej teorii grup), czy istnieją ograniczenia na typ homotopii właściwej przestrzeni klasyfikującej grupy hiperbolicznej. Okazuje się, że nie ma takich ograniczeń (porównaj Theorem M w pracy [1]).
- Pytanie postawione przez M. Gromova o istnienie skończonego metrycznie ujemnie zakrzywionego nakrycia rozgałęzionego dla dowolnej zwartej symplicjalnej pseudorozmaitości (w dowolnym wymiarze). Pozytywna odpowiedź na to pytanie zawarta jest w Theorem L z pracy [1], zaś odpowiednia konstrukcja nakryć opisana w rozdziale 20 tej pracy.
- Pytanie M. Gromova o istnienie prostego kombinatorycznego warunku implikującego w dowolnie wysokim wymiarze hiperboliczność kompleksu symplicjalnego (M. Gromov, Asymptotic invariants of infinite groups, *Geometric Group Theory*, G. Niblo and M. Roller (eds.), LMS Lecture Notes Series 182, vol. 2, Cambridge Univ. Press (1993), Remark (a) na str. 176). Warunek 7-systoliczności z pracy [1] jest odpowiedzią na to pytanie. Wcześniej warunek taki był znany tylko w wymiarze 2 (w ramach tzw. teorii małych skreśleń).

Uzupełniająca lista publikacji

Moje prace w przygotowaniu:

[OsS] D. Osajda, J. Świątkowski, *On asymptotically hereditarily aspherical groups*, praca w przygotowaniu.

Publikacje doktorantów oraz młodych matematyków z kierowanego przeze mnie zespołu, wspomniane w autoreferacie:

[E1] T. Elsner, *Flats and the flat torus theorem for systolic spaces*, Geometry & Topology 13 (2009), 661–698.

[E2] T. Elsner, *Systolic spaces with isolated flats*, praca złożona do publikacji.

[OP] D. Osajda, P. Przytycki, *Boundaries of systolic groups*, Geometry & Topology 13 (2009), 2807–2880.

[P1] P. Przytycki, *The fixed point theorem for simplicial nonpositive curvature*, Math. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 144 (2008), 683–695.

[P2] P. Przytycki, *$\underline{E}G$ for systolic groups*, Commentarii Mathematici Helvetici 84 (2009), 159–169.

[Z] P. Zawiślak, *Trees of manifolds and boundaries of systolic groups*, Fund. Math. 207 (2010), 71–99.

[Zu] J. Zubik, *Asymptotic hereditary asphericity of metric spaces of asymptotic dimension 1*, Topology and its Applications 157 (2010), 2815–2818.