5. Forum Matematyków Polskich
16–20 IX 2013, Rzeszów

Krzywizna symplicjalna i egzotyczne nieskończone grupy dyskretne

Jacek Świątkowski

Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski
swiatkow@math.uni.wroc.pl

Wykład laureata Nagrody Głównej PTM im. Stefana Banacha za rok 2012

Wiadomo, że nieskończone grupy zadane skończoną prezentacją nie poddają się klasyfikacji. Dokładniej, problem izomorfizmu dla takich grup jest nierozstrzygalny. Z tej przyczyny od lat badane są rozmaite bogate specjalne klasy takich grup, w tym klasy wyróżnione w sposób geometryczny. Wśród takich klas znajduję się np. grupy związane z przestrzeniami o niedodatniej krzywiźnie (w sensie metrycznym, daleko uogólniającym klasyczną niedodatnią krzywiznę riemannowską na rozmaitościach), a także tzw. grupy hiperboliczne, związane z wprowadzonym przez M. Gromova pojęciem asymptotycznej ujemnej krzywizny (hiperboliczność w sensie Gromova).

Niedodatnia krzywizna symplicjalna to geometryczna idea pozwalająca na konstruowanie nowych nieskończonych grup skończenie prezentowalnych, i na efektywne badanie ich własności. Opracowana została we wspólnej z Tadeuszem Januszkiewiczem pracy [1]. Istotą tej idei jest wyizolowanie pewnego kombinatorycznego warunku na kompleks symplicjalny (dowolnego wymiaru), imitującego metryczny warunek niedodatniej krzywizny, ale nie dającego się do niego zredukować. Grupy o niedodatniej krzywiźnie symplicjalnej to grupy działające przez automorfizmy na nieskończonych jednospójnych kompleksach symplicjalnych spełniających powyższy warunek, przy czym zakłada się (typowo dla geometrycznych badań grup), że działanie ma zwarty iloraz oraz skończone podgrupy stabilizujące sympleksów.

Jednym z głównych atutów niedodatniej krzywizny symplicjalnej, jako narzędzia w geometrycznej teorii grup, jest jej potencjał konstruowania grup wysokowymiarowych. Przez wymiar grupy rozumiemy tu albo jej wymiar kohomologiczny, albo bardziej geometrycznie zdefiniowany wymiar asymptotyczny. W badaniach geometrycznych własności grup pojawiły się rozmaite twierdzenia i hipotezy mówiące, że wysokowymiarowe grupy są dość nieliczne. Teoria niedodatniej krzywizny symplicjalnej pozwoliła pokazać, że w wielu sytuacjach nie jest to prawda. Wysokowymiarowe grupy istnieją w zakresie szerszym niż się dotąd wydawało, ale mają egzotyczne geometryczne własności.

Oto garść rezultatów ilustrujących powyższe stwierdzenia.

Twierdzenie 1 ([2]). *Dla każdego n istnieje grupa hiperboliczna o wymiarze kohomologicznym n nie zawierająca żadnej podgrupy izomorficznej z grupą podsta-*

wową niedodatnio zakrzywionej rozmaitości wymiaru $d > 2$. W istocie, wszystkie grupy o niedodatniej krzywiźnie symplicjalnej mają powyższą własność.

Twierdzenie to weryfikuje negatywnie hipotezę Gromova wg której każda konstrukcja wysokowymiarowych grup hiperbolicznych musi w istotny sposób wykorzystywać grupy podstawowe wysokowymiarowych rozmaitości.

Twierdzenie 2 ([1]). *Dla każdego n istnieje hiperboliczna grupa Coxetera o wirtualnym wymiarze kohomologivcznym n (tzn. posiadająca beztorsyjną podgrupę skończonego indeksu o wymiarze kohomologicznym n).*

Twierdzenie to weryfikuje negatywnie hipotezę Moussonga o nieistnieniu takich grup, motywowaną przez klasyczne twierdzenie Vinberga o nieistnieniu grup odbiciowych w wysokowymiarowych przestrzeniach hiperbolicznych.

Twierdzenie 3 ([3]). *Brzeg Gromova dowolnej hiperbolicznej grupy o niedodatniej krzywiźnie symplicjalnej nie zawiera zanurzonej kopii 2-wymiarowego dysku.*

Brzeg Gromova n-wymiarowej grupy hiperbolicznej to pewna $(n-1)$-wymiarowa przestrzeń topologiczna, ktróra w klasycznych przypadkach jest $(n-1)$-wymiarową sferą. Powyższe twierdzenie pokazuje inny niż w Twierdzeniu 1 aspekt tego, jak bardzo nowo skonstruowane wysokowymiarowe grupy odbiegają od klasycznych przykładów.

Technika niedodatniej krzywizny symplicjalnej, a w szczególności jej potencjał konstruowania nietypowych grup wysokowymiarowych, był zasadniczym narzędziem w dowodzie istnienia następującej egzotycznej grupy.

Twierdzenie 4([4]). *Istnieje nieskończona grupa skończenie generowalna, której każde działanie przez homeomorfizmy na dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni ściągalnej posiada globalny punkt stały.*

Literatura

[1] T. Januszkiewicz, J. Świątkowski, *Simplicial nonpositive curvarure*, Publications Mathematiques IHES 104 (2006), 1–85.

[2] T. Januszkiewicz, J. Świątkowski, *Filling invariants in systolic complexes and groups*, Geometry & Topology 11 (2007), 727–758.

[3] J. Świątkowski, *Fundamental pro-groups and Gromov boundaries of 7-systolic groups,* Journal of the London Mathematical Society 80 (2009), 649–664.

[4] G.Arzhantseva, M.Bridson, I.Leary, A.Minasyan T.Januszkiewicz and J.Świątkowski, *Infinite groups with fixed point properties*, Geometry and Topology 13 (2009), 1229–1264.